

Vibrations et Ondes

Équipe pédagogique de l'UFR d'ingénierie, Sorbonne Université

Table des matières

À propos	6
Jupyter	7
I Ressources de cours	8
1 Rappels sur l'oscillateur élémentaire	9
1.1 Equation du mouvement du système vibrant élémentaire	10
1.2 Mouvement libre	11
1.2.1 En l'absence d'amortissement	12
1.2.2 En amortissement sous-critique	13
1.2.3 En amortissement surcritique	13
1.2.4 Mouvement forcé	15
1.3 Méthodes fréquentielles	17
1.3.1 Méthode du facteur de qualité	18
1.3.2 Méthode de la bande passante à $-3dB$	18
1.4 Ce qu'il faut retenir sur l'oscillateur élémentaire	19
2 Vibrations des systèmes discrétisés	21
2.1 Modélisation du système	21
2.2 Énergies du système	21
2.2.1 Énergie cinétique	21
2.2.2 Énergie de déformation	22
2.3 Mouvement libre	22
2.4 Identification des modes propres de vibration	23
2.4.1 Découplage des équations	23
2.4.2 Interprétation physique	26
2.4.3 Propriétés de la base modale	26
2.4.4 Matrices modales ou réduites	27
2.4.5 Normalisation des modes propres	27
2.4.6 Équations du mouvement libre dans la base modale	28
2.4.7 Réponse libre à un état initial imposé	29
2.5 Mouvement forcé	30
2.5.1 Identification des efforts généralisés	30
2.5.2 Passage dans la base modale	30
2.5.3 Réponse forcée à une excitation harmonique	31
2.6 Systèmes dissipatifs	33
2.6.1 Modèle d'amortissement	33

2.7	Méthodes approchées	38
2.7.1	Méthode de Rayleigh pour la fréquence fondamentale	39
2.7.2	Méthode de Rayleigh-Ritz pour réduire le nombre de degrés de liberté	39
3	Vibrations de systèmes continus: éléments généraux et vibrations des barres	41
3.1	Introduction	41
3.2	Vibrations longitudinales dans les barres	42
3.2.1	Euler-Lagrange – Analogie avec les systèmes discrets	43
3.2.2	Dynamique d’une tranche de barre	46
3.2.3	Découplage des équations homogènes	47
3.2.4	Identification des modes	48
3.2.5	Orthogonalité des modes	51
3.2.6	Conditions initiales	52
3.2.7	Mouvement forcé	53
3.3	Modes pour différentes conditions limites	55
4	Vibrations des poutres en flexion	58
4.1	Équation des vibrations transverses dans les poutres	59
4.2	Modes de vibrations des poutres en flexion	61
4.3	Identification des modes propres transverses	63
4.3.1	Modes propres de la poutre simplement appuyée aux deux extrémités.	65
4.3.2	Modes propres de la poutre libre aux deux extrémités.	66
4.3.3	Modes propres de la poutre bi-encastree	68
4.3.4	Modes propres de la poutre encastree-libre	70
4.3.5	Modes propres de la poutre encastree - appuyée	71
4.4	Énergies cinétique et potentielle	72
4.5	Comparaison des fréquences propres des modes longitudinaux et transverses	72
4.6	Orthogonalité, conditions initiales et régime forcé	73
4.7	Approximation des vibrations des structures complexes	75
4.7.1	Méthode de Rayleigh	76
4.7.2	Méthode de Rayleigh-Ritz	78
	Annexes	80
	Equation des vibrations transverses des cordes	80
	Vibrations de torsion dans les arbres	82
II	Exercices vibrations	85
5	Modèles à 1 DDL	86
5.1	Mise en équation	87
5.2	Solutions	89
6	Le salaire de la peur	95
7	Le lave-linge	101

8 Vibrations d'un train à trois wagons	107
8.1 Régime d'oscillations libres	107
8.2 Régime d'oscillations forcées	111
9 Vibrations du châssis d'une voiture	114
9.1 Régime d'oscillations libres	114
9.2 Régime d'oscillations forcées	118
10 Microscope à force atomique	122
10.1 Dynamique et modes propres	124
10.2 Influence du substrat	126
10.2.1 Dimension des quantités	126
10.2.2 Effet de k sur les fréquences des modes	126
10.3 Réponse libre	127
10.4 Réponse forcée	128
11 Vibrations longitudinales dans une poutre de section variable	139
11.1 Dynamique vibratoire	139
11.2 Vibration libre	139
11.3 Réponse forcée	140
12 Modélisation des vibrations transverses d'un rail	145
12.1 Mouvement libre	146
12.2 Méthode de Rayleigh pour le mode fondamental	146
12.3 Réponse au passage du train	147
13 Vibrations d'une flèche	157
13.1 Au départ, en quittant l'arc : vibrations libres en flexion	157
13.2 A l'arrivée sur la cible : Vibrations longitudinales	161
14 Méthodes approchées en vibrations longitudinales	164
15 Vibrations transverses : Méthode de Rayleigh-Ritz	173
 III Exercices supplémentaires vibrations	 179
16 Modèle discret d'un pétrolier soumis à la houle	180
16.1 Modélisation	180
Inerties	180
Raideurs	181
Structure	182
16.2 Mouvement libre : Modes et fréquences propres	184
16.3 Mouvement forcé : Réponse au passage d'un train de houle	186

IV Exercices ondes	189
17 La corde vibrante : ondes	190
17.1 Equation de dispersion de plusieurs types d'ondes	192
18 Ondes acoustiques	199
18.1 Onde sphérique	199
18.2 Réflexion totale - onde plane inhomogène	201
19 Principe de fonctionnement de la sismique réfraction	210
20 Vagues et tsunamis	220
20.1 Ondes capillaires	221
20.2 Etude des vagues en eau peu profonde et profondeur variable	222
20.3 Aménagement sous-marin de l'entrée d'un port	223
Vagues et tsunamis	225
Ondes capillaires	227
Hauteur variable	229
Aménagement	232
Annexes	235
A Algèbre utile aux vibrations et ondes	235
A.1 Systèmes singuliers	235
A.2 Indépendances de vecteurs	235
A.3 Définitions autour du produit scalaire	236
A.4 Résultats utiles de diagonalisation	236
A.4.1 Problème de valeurs propres généralisé	237
A.5 Généralisation aux fonctions	238
B Oscillateur à un degré de liberté	240
B.1 Vibrations libres	241
B.2 Vibrations forcées	243
B.2.1 Force externe harmonique	244
Formulaire	248
Calculs de déterminants de matrice	248
Transformée de Laplace	248
Tables d'intégrales	249

À propos

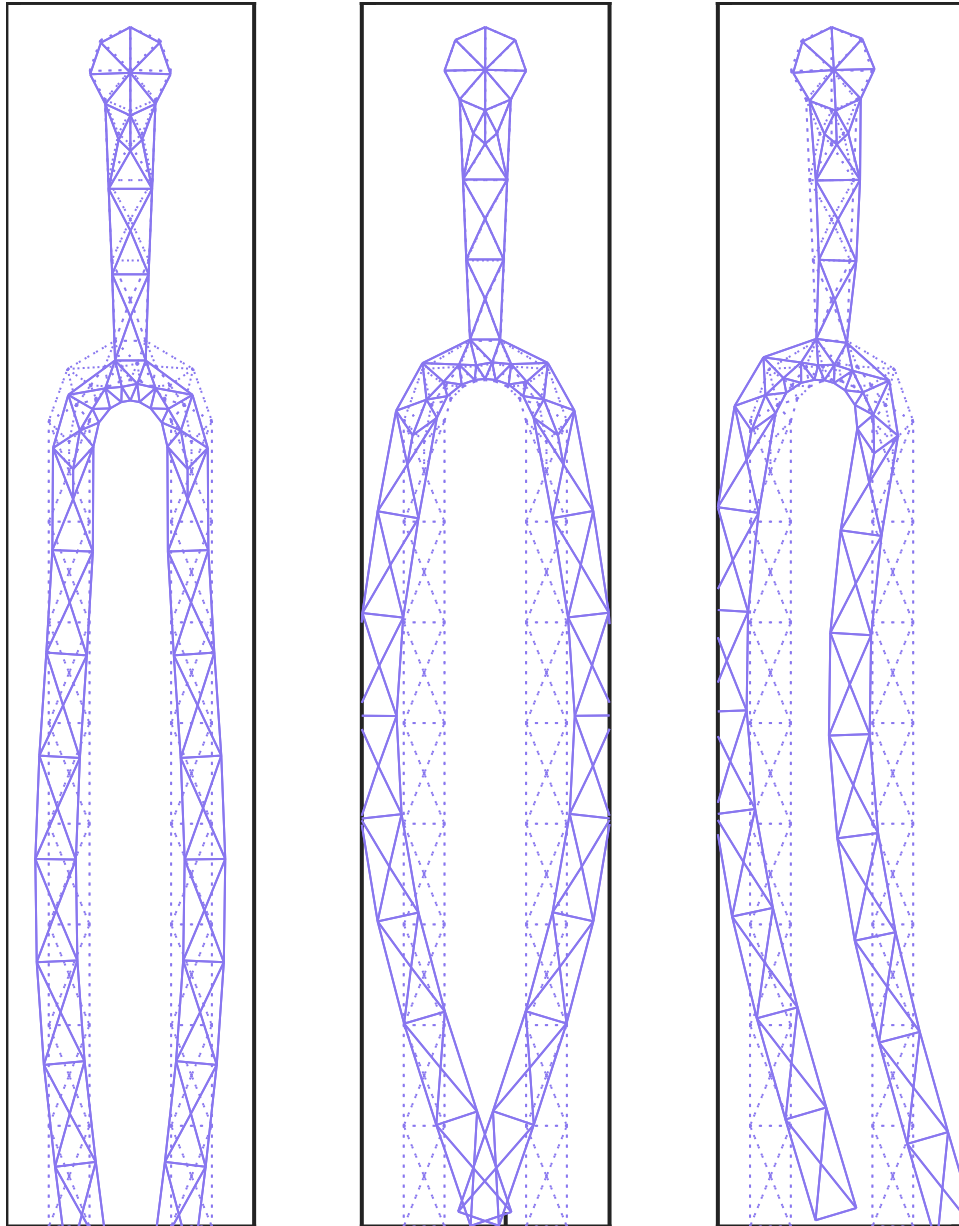


Figure 1: Trois premiers modes de vibration d'un diapason, simulation éléments finis. Source: projet de bachelor GC, Albane Descombes, EPFL, 2017

Bienvenue sur le site web du cours de Vibrations et Ondes, donné en première année de master mention mécanique à Sorbonne Université.

Vous trouverez sur ce site web les sujets de travaux dirigés (avec correction), des chapitres théoriques et des notebooks Jupyter pour les applications numériques de TD.

! Important

La feuille descriptive de l'unité d'enseignement est disponible [ici](#) (ou au [format PDF](#)).
Vous y trouverez:

- Le nom des responsables du cours
- Les modalités d'évaluation (nombre de contrôles et pondérations)
- Le plan du cours

Jupyter

Un Jupyterlab avec Numpy, Scipy et Matplotlib est disponible [ici](#), et propose des notebooks correspondants aux travaux dirigés "numériques".

partie I

Ressources de cours

1 Rappels sur l'oscillateur élémentaire

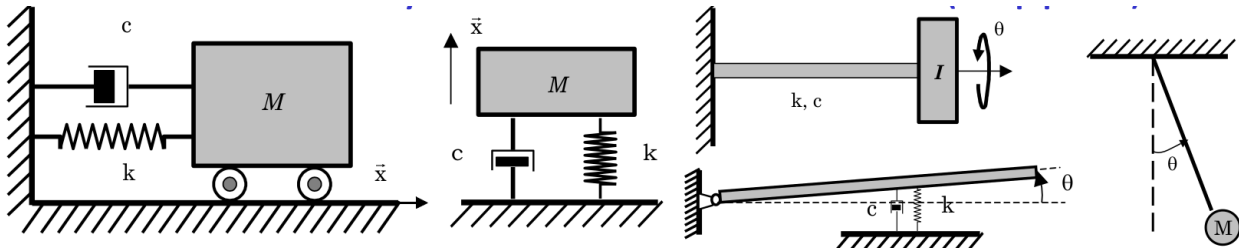


Figure 1.1: Différents modèles pour les systèmes vibrants à 1 degré de liberté

Une structure qui vibre présente généralement une déformation complexe impliquant des déplacements globaux et/ou locaux qui sont combinaisons de translations et de rotations, chaque élément mobile de la structure pouvant présenter jusqu'à 6 degrés de liberté (3 translations perpendiculaires, 3 rotations d'axes perpendiculaires). Mais en première approximation, il est souvent possible de réduire une vibration complexe à un seul degré de liberté du système. On pourra par exemple étudier les vibrations d'un pont en limitant le déplacement observé à la translation verticale du tablier en son centre. Les vibrations d'une perceuse se ressentent à la poignée dans toutes les directions, mais il est possible de modéliser le système de manière à considérer seulement la vibration en rotation du corps l'outil en considérant comme négligeables les amplitudes des vibrations dans les autres dimensions.

De fait, toute structure vibrante peut faire l'objet d'un modèle impliquant un seul degré de liberté (DDL). S'il s'agit d'une translation, il sera noté x , s'il s'agit d'une rotation on choisit de l'appeler θ .

L'apparition d'une vibration nécessite, par ailleurs, d'associer à ce déplacement les caractéristiques dynamique et structurelles du système :

- Une caractéristique élastique qui s'oppose au déplacement. On l'appelle raideur et on la note k lorsqu'elle exerce un effort en traction/compression, K lorsqu'elle exerce un couple.
- Une caractéristique inertielle qui recueille l'énergie cinétique. En translation, on considère la masse en mouvement, notée M . En rotation on considère plutôt le moment d'inertie noté I .
- Une action extérieure qui met la structure hors d'équilibre. Il s'agit d'une force F parallèle au déplacement en translation ou d'un couple Γ dans l'axe de la rotation.

Dans les systèmes réels il faut prendre en compte la dissipation de l'énergie vibratoire qui étouffe le mouvement de la structure libre, en introduisant un coefficient d'amortissement structural noté c .

La figure 1 fait l'inventaire des représentations schématiques qu'on pourra rencontrer par la suite pour les modèles de systèmes vibrants à 1 DDL

La modélisation peut avoir comme objectif :

- la prédiction des variations du déplacement lorsque les caractéristiques dynamiques sont connues
- l'identification des caractéristiques dynamiques lorsqu'on connaît les variations temporelles ou fréquentielles du déplacement, généralement grâce à la mesure.

Une fois décrits les paramètres structurels et dynamiques du système à 1 DDL, ainsi que l'action extérieure, il faut traduire mathématiquement les équilibres qui relient les mouvements du système aux efforts qu'il subit.

1.1 Equation du mouvement du système vibrant élémentaire

L'équilibre dynamique du système de la figure 2 peut s'exprimer de plusieurs manières :

Équilibre des forces dans un système à 1DDL en translation

- Par application du **principe fondamental de la dynamique** : la somme des forces subies par le mobile est égale à la quantité d'accélération, produit de sa masse et de son accélération $m\ddot{x}$.

Les forces en jeu sont :

- la force F qui excite le système
- la force de rappel élastique proportionnelle au déplacement et à la raideur: $-kx$
- la force amortissante dont on suppose ici qu'il s'agit d'une force visqueuse proportionnelle à la vitesse avec un coefficient constant: $-c\dot{x}$

et l'équilibre s'écrit finalement :

$$m\ddot{x} = F - kx - c\dot{x}$$

On peut réunir les termes impliquant le déplacement et ses dérivées pour obtenir une expression homogène de l'équation différentielle du mouvement :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (1.1)$$

- Par le **principe de conservation de l'énergie** qui établit que la variation de l'énergie totale du système est égale à la puissance de la force excitatrice moins la puissance dissipée dans les liaisons. Les termes à considérer dans cet équilibre sont :

- la variation de l'énergie potentielle de déformation élastique: $\partial_t(\frac{1}{2}kx^2) = kx\dot{x}$
- la variation de l'énergie cinétique : $\partial_t(\frac{1}{2}m\dot{x}^2) = m\dot{x}\ddot{x}$
- la puissance positive de la force F qui excite le système : $F\dot{x}$

– la puissance négative de la force amortissante : $-c\dot{x}^2$

On a donc la relation d'équilibre suivante :

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = F\dot{x} - c\dot{x}^2 \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = F - c\dot{x}$$

et on retrouve bien l'équation du mouvement (1.1).

- Par l'**équation de Lagrange** dont on admet l'expression suivante qui introduit le lagrangien $\mathcal{L}$ comme la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$ dont dérive la force d'amortissement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} = F \quad (1.2)$$

Avec $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ et $\mathcal{D} = \frac{1}{2}c\dot{x}^2$, le développement de l'équation de Lagrange (1.2) donne l'équation du mouvement (1.1)

1.2 Mouvement libre

Le mouvement libre du système est celui qu'on peut observer, lorsqu'après avoir été mis hors de son équilibre statique, soit par un déplacement, soit par une impulsion de force plus ou moins brève, le système ne subissant plus aucune action extérieure, évolue librement.

Cette situation de mouvement libre est traduite par l'équation (1.1) avec $F = 0$:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.3)$$

La solution de cette équation différentielle du second ordre est connue et de forme générale $x(t) = Xe^{st}$ ou $s \in \mathbb{C}$.

Substituer cette forme dans l'équation (1.3) permet d'obtenir l'équation caractéristique suivante :

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (1.4)$$

Les racines s de l'équation 1.4 s'écrivent :

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}$$

avec $\mu^2 = \frac{k}{m}$ et $\lambda = \frac{c}{2m}$.

Elles déterminent la forme générale de l'équation du mouvement libre $x(t)$ comme combinaison linéaire des solutions possibles issues de l'équation caractéristique:

$$x(t) = X_1 e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^2})t} + X_2 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu^2})t} = e^{-\lambda t} (X_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}t} + X_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}t})$$

On peut ici tenter de faire le lien entre le phénomène observé et ce modèle mathématique.

D'abord la solution trouvée est modulée par une exponentielle décroissante dont l'argument est directement proportionnel au coefficient d'amortissement c . Ce premier terme est bien cohérent avec l'observation d'un étouffement du mouvement. On remarque aussi que plus la masse m du mobile est grande, plus le temps caractéristique d'amortissement $\tau = \lambda^{-1}$ est grand. ce qui correspond à l'observation.

En revanche, le second terme doit faire apparaître le caractère oscillant du mouvement. Pour cela, il faut nécessairement que les arguments des deux exponentielles soient des nombres imaginaires purs et conjugués. On doit donc avoir $\lambda^2 < \mu^2$. Alors :

$$x(t) = e^{-\lambda t} (X_1 e^{j\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}t} + X_2 e^{-j\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}t})$$

Cette expression est bien celle d'une oscillation amortie de pulsation $\omega_d = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$. On peut l'écrire de manière à faire apparaître plus explicitement l'oscillation :

$$x(t) = e^{-\lambda t} (X_a \cos \omega_d t + X_b \sin \omega_d t)$$

ou encore

$$x(t) = e^{-\lambda t} X \cos(\omega_d t + \phi)$$

L'analyse de ces 3 expressions équivalentes du mouvement de l'oscillateur à 1ddl libre de toute action extérieure amène 2 remarques importantes :

- La pulsation de l'oscillation dépend de la masse m , de la raideur k et du coefficient d'amortissement c , c'est à dire des 3 éléments structurels qui régissent l'équilibre dynamique.
- L'amplitude et la phase de l'oscillation sont uniquement déterminées par les conditions de ce mouvement à un instant donné. Si on considère l'instant initial $t = 0$, par exemple, on constate que les éléments structurels ne sont pas présents dans les expressions de la position et de la vitesse initiales.

On a vu plus haut que l'amortissement doit demeurer sous un certain seuil critique pour que le mouvement soit vibratoire. Il convient de mener une étude suivant les variations de ce paramètre.

1.2.1 En l'absence d'amortissement

A la limite où le système en oscillation ne dissipe aucune énergie dans ses liaisons, on a un oscillateur élémentaire parfait dont le mouvement ne s'arrête jamais. Cela est traduit par l'expression de la position pour $\lambda = 0$ et $\omega_0 = \omega_d(\lambda = 0) = \mu = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$x(t) = X \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Le mouvement décrit par cette expression est le mouvement naturel de la structure sans amortissement.

La pulsation qui le caractérise est appelée **pulsation naturelle ou pulsation propre**. Elle dépend uniquement des propriétés élastique et inertielle du système, et elle vaut :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.2.2 En amortissement sous-critique

Tant que $\lambda^2 \leq \mu^2$, soit $\xi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{c}{2m\omega_0} < 1$, le mouvement est oscillant amorti et le déplacement s'écrit :

$$x(t) = X e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

où ω_d est la pulsation du système amorti ou pseudo pulsation :

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

Les constantes d'amplitude et de phase s'identifient en considérant la position et la vitesse du système à un instant donné, par exemple à l'instant initial $t = 0$:

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 = X \cos \phi \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 = X (-\xi\omega_0 \cos \phi - \omega_d \sin \phi) \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$X = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o + \xi\omega_o x_o}{\omega_d} \right)^2} \quad \phi = \arctan \left(\frac{v_o + \xi\omega_o x_o}{x_o \omega_d} \right)$$

De façon équivalente, on peut exprimer le déplacement comme suit :

$$x(t) = (X_a \cos \omega_d t + X_b \sin \omega_d t) e^{-\xi\omega_0 t}$$

on trouve alors les coefficients d'amplitude X_a et X_b en considérant les conditions initiales comme précédemment.

1.2.3 En amortissement surcritique

Lorsque $\xi \geq 1$, aux fonctions harmoniques se substituent des fonctions hyperboliques. Le mouvement reste amorti, mais il n'est pas oscillant et le déplacement s'écrit :

$$x(t) = e^{-\lambda t} (X_1 e^{\alpha t} + X_2 e^{-\alpha t})$$

ou encore

$$x(t) = e^{-\lambda t} (X_a \cosh \alpha t + X_b \sinh \alpha t)$$

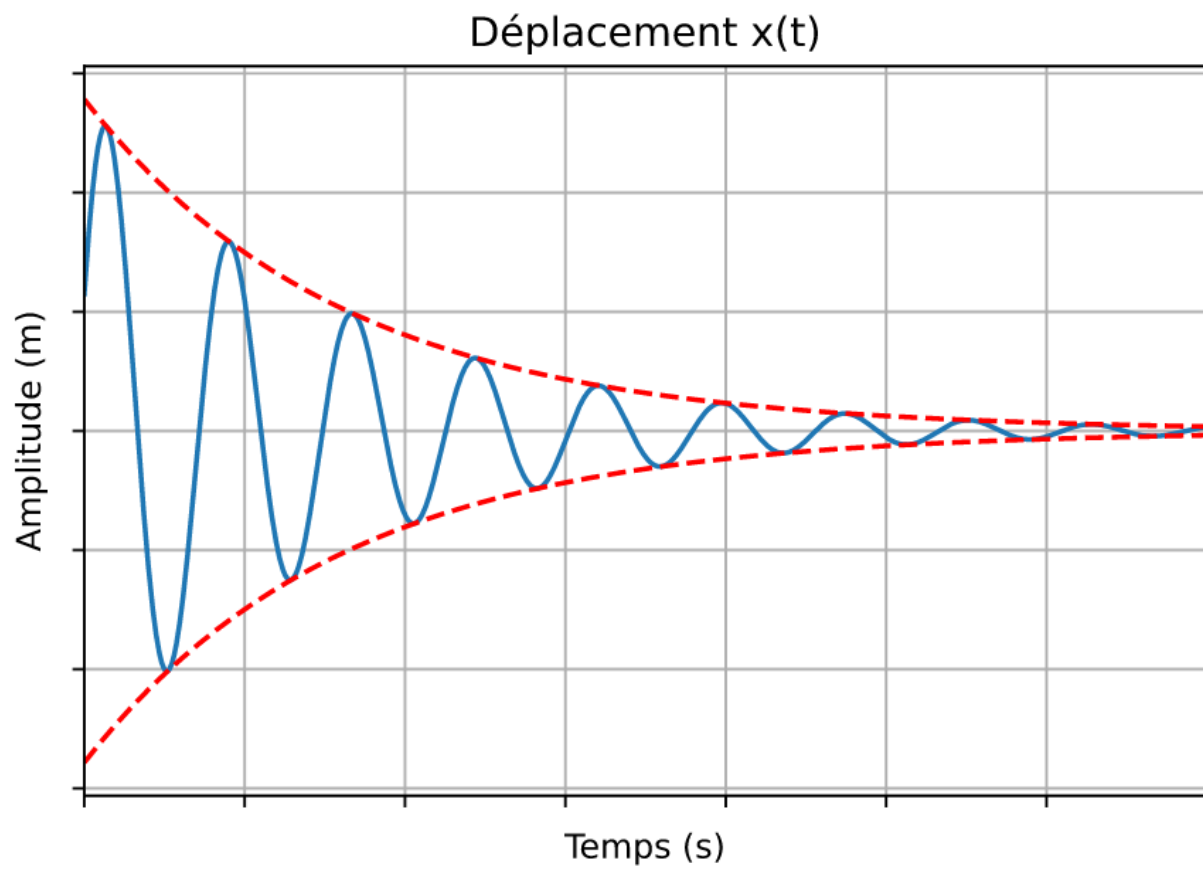


Figure 1.2: Réponse libre d'un système sous-amorti

avec $\alpha = \omega_o \sqrt{\xi^2 - 1}$.

Comme précédemment, les constantes d'amplitude sont dépendantes de l'état initial du système en position et en vitesse.

Mais les vibrations apparaissent et s'établissent souvent sous l'effet d'actions extérieures plus ou moins durables. Ces vibrations dites forcées ont des caractéristiques différentes des vibrations libres. On obtient leur modèle analytique en considérant l'équation du mouvement forcé.

1.2.4 Mouvement forcé

On considère ici Équation 1.1 qui fait apparaître la force extérieure $F(t)$ dépendant du temps:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

Pour résoudre cette équation quelle que soit la forme temporelle de la force appliquée, on utilise le théorème de Fourier qui exprime que toute fonction continue $f(t)$ du temps peut s'écrire comme une somme continue de fonctions harmoniques pondérées par une fonction de la fréquence $\hat{f}(\Omega)$ appelée le spectre.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

où le spectre $\hat{f}(\Omega)$ est une fonction complexe de la pulsation Ω , indépendante du temps t .

En appliquant le théorème de Fourier à l'équation du mouvement forcé, on arrive à l'égalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} -m\Omega^2 \hat{x}(\Omega) e^{j\Omega t} + j\Omega c \hat{x}(\Omega) e^{j\Omega t} + k \hat{x}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

et pour chaque valeur de Ω on obtient l'équation suivante :

$$(-m\Omega^2 + j\Omega c + k) \hat{x}(\Omega) = \hat{F}(\Omega)$$

Finalement l'amplitude $\hat{x}(\Omega)$ de la réponse du système à la force harmonique d'amplitude $\hat{F}(\Omega)$ s'écrit :

$$\hat{x}(\Omega) = \frac{\hat{F}(\Omega)}{k - m\Omega^2 + j\Omega c} \quad (1.5)$$

Et la réponse forcée $x(t)$ du système à la force quelconque $F(t)$ s'obtient par transformée de Fourier :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

La plupart du temps, l'ingénieur s'intéresse à l'amplitude $\hat{x}(\Omega)$ de la réponse en fonction de la fréquence de la force appliquée $\hat{F}(\Omega)$ et des paramètres propres à la structure: ω_0, ξ .

On part donc de l'équation (1.5) pour écrire l'amplitude du déplacement en fonction de la fréquence de la façon suivante :

$$\hat{x}(\Omega) = \frac{\hat{F}(\Omega)/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\xi\omega_0\Omega}$$

Cette amplitude est complexe, $\hat{x}(\Omega) = X e^{j\Phi}$. Il faut donc considérer :

- l'amplitude réelle du déplacement qui est le module de l'amplitude complexe :

$$X(\Omega) = \frac{\hat{F}(\Omega)/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\Omega^2}} = \frac{\hat{F}(\Omega)/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

- la phase du déplacement qui est l'argument de l'amplitude complexe :

$$\Phi(\Omega) = \arctan\left(\frac{-2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

La phase traduit le retard de la réponse par rapport à la l'excitation à la fréquence Ω . Ce retard est d'autant plus grand que l'amortissement est fort et vaut : $\Phi(\Omega)/\Omega$.

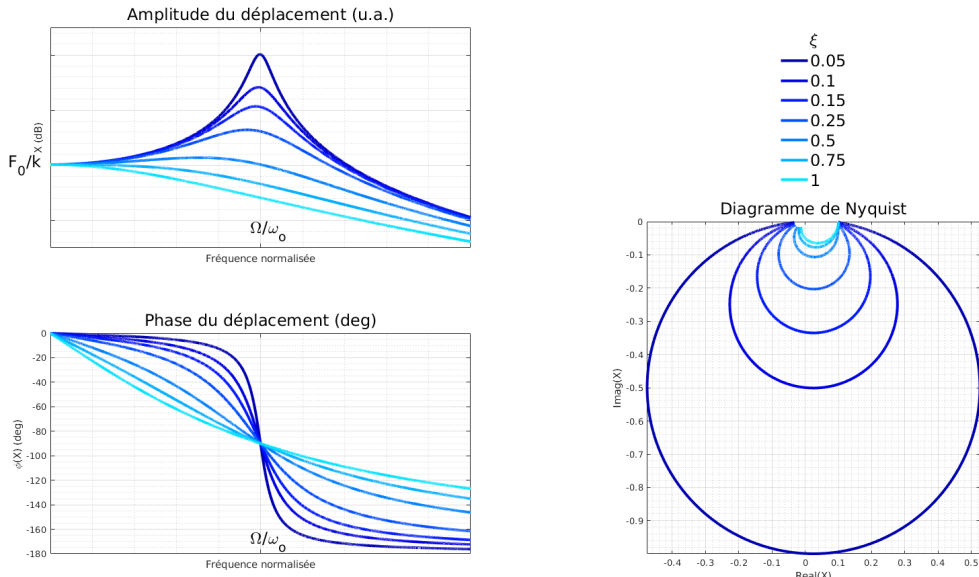


Figure 1.3: Réponse en fréquence en fonction de l'amortissement

Les courbes issues de ces modèles analytiques de l'amplitude et de la phase du déplacement en fonction de la fréquence sont présentées à la Figure 1.3 et pour différentes valeurs de l'amortissement ξ . Leur analyse met en évidence un comportement de filtre passe-bas et fait apparaître 3 domaines de fonctionnement caractéristiques:

- en basse fréquence les effets inertiels sont très faibles, et la structure a un mouvement quasi-statique d'amplitude $\hat{F}(0)/k$.
- la fréquence augmentant, les effets inertiels s'intensifient et l'amplitude du mouvement augmente (pour un amortissement relativement faible).
- au voisinage de la fréquence propre ($\Omega \approx \omega_0$), l'amplitude du déplacement est maximum et d'autant plus grand que l'amortissement est faible :

$$X(\Omega = \omega_0) = \frac{F(\omega_0)}{2\xi k}$$

. Le pic d'amplitude caractérise la résonance entre le système et l'excitation. On note parallèlement, autour de la résonance, que la phase entre la force appliquée et le déplacement varie de π et ce d'autant plus rapidement que l'amortissement est faible.

- Pour les plus hautes fréquences, l'amplitude de la vibration forcée du système diminue jusqu'à disparaître.

$$X(\Omega \rightarrow \infty) = 0$$

L'énergie apportée par la force est absorbée par sa structure élastique et ses liaisons sans qu'elle soit mise en mouvement.

1.3 Méthodes fréquentielles

On doit considérer ici la réponse du système en fonction de la fréquence de l'excitation. Cette fonction appelée fonction de transfert vibratoire (*Frequency Response Function (FRF)*), est mesurée généralement en appliquant au système une force de spectre étendu, comme précédemment une impulsion de Dirac ou encore un bruit blanc, et en calculant sa transformée de Fourier. Pour un système linéaire, en notation complexe, le modèle mathématique de cette réponse s'écrit :

$$H(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\xi\omega_0\Omega}$$

Le module de la fonction de transfert suit donc :

$$|H(\Omega)| = \frac{|X(\Omega)|}{|F(\Omega)|} = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\Omega^2}}$$

Ces fonctions sont représentées sur la Figure 1.3 où l'on voit bien que l'amortissement ξ détermine la forme de la courbe en termes d'amplitude du pic de résonance d'une part, de largeur du même pic d'autre part mais aussi de diamètre du cercle et position du centre dans la représentation dans le plan complexe (Nyquist). Il s'agit donc de trouver un modèle mathématique de ces caractéristiques qui dépend de l'amortissement ξ afin de l'identifier.

1.3.1 Méthode du facteur de qualité

A fréquence nulle l'amplitude de la FRF de la structure dépend seulement de la raideur k : $H(0) = \frac{1}{m\omega_0^2} = \frac{1}{k}$. A la résonance, $\Omega = \omega_0$ et $|H(\omega_0)| = \frac{1}{2\xi\omega_0^2 m} = \frac{1}{2\xi k}$. On appelle "facteur de qualité" Q le rapport entre ces deux valeurs mesurées :

$$Q = \frac{H(\omega_0)}{H(0)} = \frac{1}{2\xi}$$

et par conséquent :

$$\xi = \frac{1}{2Q}$$

1.3.2 Méthode de la bande passante à $-3dB$

La largeur du pic de résonance est une fonction croissante de l'amortissement. Pour déterminer cette fonction, on choisit arbitrairement de mesurer la largeur du pic à la moitié de sa hauteur en représentation linéaire de l'énergie normalisée par sa valeur maximale. Pour plus de précision on mesure plutôt cette largeur sur un tracé logarithmique et une échelle verticale en décibels (dB). La mi-hauteur du pic correspond alors à $3dB$ sous le maximum. On doit donc chercher, en fonction de ξ , les expressions mathématiques de Ω telles que

$$\frac{|H(\Omega)|^2}{|H(\omega_0)|^2} = \frac{1}{2}$$

Ces expressions sont les racines de l'équation suivante :

$$\frac{4\xi^2\omega_0^4}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\Omega^2} = \frac{1}{2}$$

On identifie les racines :

$$\Omega_{1,2}^2 = \omega_0^2(1 - 2\xi^2 \pm 4\xi\sqrt{1 - \xi^2})$$

Dans le cas où l'amortissement est faible ($\xi \ll 1$), on obtient :

$$\Omega_{1,2} \approx \omega_0(1 \pm \xi)$$

la largeur à $-3dB$ du pic de résonance est

$$\Delta\Omega_{-3dB} = \Omega_1 - \Omega_2 = 2\xi\omega_0$$

D'où le facteur d'amortissement :

$$\xi = \frac{\Delta\Omega_{-3dB}}{2\omega_0}$$

1.4 Ce qu'il faut retenir sur l'oscillateur élémentaire

A ce stade, on a établi le modèle mathématique d'un système vibrant dissipatif décrit avec un seul degré de liberté. On a déterminé l'équation différentielle linéaire qui traduit l'équilibre dynamique entre inertie, élasticité et amortissement.

Il faut considérer deux types de solutions de cette équation d'équilibre qui sont :

- la **vibration libre** résultant simplement d'un état initial hors d'équilibre en position et/ou en vitesse,
- la **vibration forcée** qui est engendrée par l'application d'une force extérieure variant dans le temps.

Finalement on retiendra qu'un système à 1 degré de liberté peut vibrer librement si

- il est caractérisé par une masse m
- sa structure est élastique et caractérisée par une raideur k

Ces deux paramètres définissent la fréquence de sa vibration naturelle ou **fréquence propre**:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Si son amortissement structurel est tel que $\xi < 1 \Leftrightarrow c < 2\sqrt{mk}$, alors sa vibration libre présente une fréquence d'oscillation

$$\omega_d = \omega_o \sqrt{1 - \xi^2}$$

et l'amplitude de l'oscillation décroît exponentiellement avec une constante de temps

$$\tau_a = \frac{1}{\xi\omega_o} = \frac{2m}{c}$$

- Par ailleurs l'amplitude et la phase de l'oscillation libre sont déterminées par l'état initial du système en position et en vitesse.

On peut réduire l'étude de la réponse à un effort extérieur durable et de forme quelconque à la superposition de forces harmoniques. C'est pourquoi on étudie le comportement vibratoire des structures en fonction de la fréquence de l'effort appliqué.

Le système vibrant dissipatif élémentaire se comporte vis à vis des efforts extérieurs dynamiques comme un filtre passe-bas. Le mouvement vibratoire résultant présente les caractéristiques suivantes :

- Aux fréquences inférieures à la fréquence propre,
 - la force harmonique appliquée est convertie intégralement en une vibration harmonique de même fréquence.

- L'amplitude du mouvement croît avec la fréquence.
 - La force et la vibration sont en phase
- Autour de la fréquence propre :
 - la force harmonique appliquée est convertie intégralement en une vibration harmonique de même fréquence.
 - la structure entre en résonance : la vibration est fortement amplifiée. L'amplitude du mouvement atteint un pic de résonance quand la fréquence de l'excitation approche la fréquence propre
 - La phase entre force et vibration s'inverse
- pour les excitations aux fréquences supérieures :
 - la vibration tend à disparaître
 - la structure élastique absorbe l'énergie de la force appliquée

2 Vibrations des systèmes discrétisés

2.1 Modélisation du système

Pour modéliser l'évolution de la déformation élastique d'un système vibrant, il est nécessaire d'identifier un ensemble d'éléments de la structure pourvus d'une masse et pouvant se déformer ou se déplacer de manière indépendante. Les paramètres indépendants caractérisant entièrement les déplacements/déformations du système (translations et rotations) sont appelés degrés de liberté (ddl) et constituent les **coordonnées généralisées** du système discrétisé. Le modèle est d'autant plus précis que le nombre de degrés de liberté est élevé. Pourtant un modèle simple ne comptant qu'un nombre réduit de ddl suffit souvent à expliquer ses vibrations.

Pour un système à N degrés de liberté (ddl), les coordonnées généralisées sont les fonctions à identifier $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) et sont rassemblées dans le vecteur $\mathbf{x}(t)$

Ce cours se limite à l'étude des systèmes linéaires dont la vibration est une petite perturbation ($\|x_i(t)\| \ll \epsilon$) autour d'un équilibre stable déterminé par les minima d'énergie potentielle $\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_0 = 0, \forall i$.

2.2 Énergies du système

Une fois identifiées les coordonnées généralisées, il est possible d'écrire les énergies cinétiques et potentielles du système dans un mouvement quelconque avec une déformation arbitraire. On a vu plus haut en effet que la vibration consiste, après un apport d'énergie initial, en la transformation alternée de l'énergie potentielle élastique en énergie cinétique. En l'absence de dissipation, le bilan énergétique reste constant et les équations du mouvement doivent traduire cet équilibre dynamique.

On commence donc par exprimer les énergies cinétique et potentielle en fonction des coordonnées généralisées.

2.2.1 Énergie cinétique

L'énergie cinétique apparaît comme une forme quadratique des vitesses généralisées :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

En introduisant le vecteur des vitesses généralisées $\dot{\mathbf{x}}(t)$, on peut écrire ce résultat comme:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}$$

où l'on a réuni les coefficients des termes quadratiques dans la **matrice d'inertie** :

$$\mathbf{M} = [m_{ij}] = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right]$$

2.2.2 Énergie de déformation

L'**énergie potentielle élastique** prend une forme quadratique semblable:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j$$

qu'on peut écrire de la même manière:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}$$

où l'on fait apparaître la **matrice de raideur** :

$$\mathbf{K} = [k_{ij}] = \left[\frac{\partial U}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

i Note 1: Remarque

Les matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ sont nécessairement carrées, de dimension $N \times N$ et symétriques. Elles sont également toutes deux définies positives, c'est-à-dire que :

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x},$$

ce qui revient à dire que les énergies potentielles et cinétiques sont toujours non-négatives pour tout vecteur de déplacement et tout vecteur vitesse.

Notez que $\mathbf{M}$ n'est pas singulière, alors que $\mathbf{K}$ peut être singulière (si des mouvements de corps rigide existent).

2.3 Mouvement libre

En l'absence de force exercée de façon permanente au système, mais à la suite d'une perturbation de son équilibre statique, le système se met en mouvement. L'objet des développements qui suivent est d'établir analytiquement l'expression des variations temporelles des coordonnées généralisées.

Du fait que le système évolue librement, mais avec des contraintes éventuelles de liaison, les mouvements peuvent être considérés comme ses déformations naturelles, dépendant uniquement de ses caractéristiques élastiques et inertielles.

Considérant le Lagrangien $L = T - U$, on peut écrire l'équilibre dynamique avec les équations de Lagrange en introduisant les vecteurs d'opérateurs $\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$ et $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial (T - U)}{\partial \mathbf{x}} = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} (\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}) = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{d}{dt} \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = 0
\end{aligned}$$

On arrive finalement à un système d'équations du mouvement libre qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = 0 \quad (2.1)$$

L'équilibre dynamique du système à N degrés de liberté est ainsi décrit par N équations différentielles chacune portant sur un degré de liberté, mais liées par des termes de couplage via $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$.

2.4 Identification des modes propres de vibration

2.4.1 Découplage des équations

Pour résoudre Équation 2.1, on va s'attacher à transformer l'équation de manière à enlever les couplages. Pour cela, on va postuler une solution $\mathbf{x}(t)$ de la forme:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} p(t),$$

$\mathbf{X}$ donne la "forme spatiale" de la solution et $p(t)$ l'oscillation en temps. En y substituant cette solution, on obtient :

$$\mathbf{M} \mathbf{X} \ddot{p}(t) + \mathbf{K} \mathbf{X} p(t) = 0$$

On a toujours une équation matricielle, pour aller plus loin, on prend le produit scalaire avec un vecteur $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^N$ quelconque, et on obtient l'équation scalaire suivante, valide $\forall \mathbf{Y}$:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \ddot{p} + \mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{X} p = 0, \forall \mathbf{Y}.$$

On peut reformuler l'équation comme un déterminant nul:

$$\begin{vmatrix} \ddot{p} & p \\ -\mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{X} & \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \end{vmatrix} = 0 \quad \forall \mathbf{Y}$$

Cela indique que la matrice 2×2 ci-dessus est singulière, donc que ses colonnes sont linéairement dépendantes, c'est-à-dire qu'il existe λ tel que:

$$\begin{cases} \ddot{p} + \lambda p = 0 \\ -\mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{X} + \lambda \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = 0 \quad \forall \mathbf{Y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{p} + \lambda p = 0 \\ \mathbf{Y}^T (-\mathbf{K} \mathbf{X} + \lambda \mathbf{M} \mathbf{X}) = 0 \quad \forall \mathbf{Y} \end{cases} \quad (2.2)$$

Puisque la deuxième égalité est valide pour tout $\mathbf{Y}$, il faut que $-\mathbf{K} \mathbf{X} + \lambda \mathbf{M} \mathbf{X} = 0$. On a alors:

$$\mathbf{K} \mathbf{X} = \lambda \mathbf{M} \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}}{\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X}}$$

Puisque les matrices $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ sont définies positives (cf. Note 1), on a $\lambda \geq 0$, on peut donc remplacer $\lambda = \omega^2$ dans la première équation de (2.2) :

$$\begin{cases} \ddot{p} + \omega^2 p = 0 \\ \mathbf{K} \mathbf{X} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{X} \end{cases} \quad (2.3)$$

La première équation est l'équation d'un oscillateur harmonique : on obtient bien une réponse vibratoire (pour $\omega \neq 0$) !

La seconde équation du système (2.3) est un problème de valeurs propres généralisé. La résolution de ce problème donne N valeurs propres $\omega_n^2 (n = 1, \dots, N)$ positives, auxquelles sont associés N vecteurs propres $\mathbf{X}_n$.

i Note 2: Remarque : séparation espace-temps

Dans le système (2.3), la première équation est une équation en temps, sans information d'espace (connaître p n'aide pas à savoir comment les degrés de libertés bougent).

A contrario, le temps est absent de la seconde équation du système (2.3), et $\mathbf{X}$ renseigne sur le mouvement relatif des différents degrés de liberté (mais pas sur l'évolution au cours du temps de ce mouvement).

On a donc en quelque sorte séparé les variables spatiales et temporelles. On fera la même chose, de manière plus évidente, pour le cas continu.

i Remarque : solution générale

Pour chaque paire de valeur propre ω_n^2 et vecteur propre $\mathbf{X}_n$ solution de $\mathbf{K}\mathbf{X}_n = \omega_n^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_n$, on a une équation d'un oscillateur à un seul degré de liberté:

$$\ddot{p}_n + \omega_n^2 p_n = 0,$$

ce qui veut dire que $\mathbf{X}_1 p_1(t), \mathbf{X}_2 p_2(t), \dots, \mathbf{X}_N p_N(t)$ sont solutions de l'équation de mouvement. Par linéarité, la solution générale de l'équation du mouvement s'écrit:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{X}_n p_n(t).$$

On appelle cette forme de solution la **décomposition en modes propres**.

L'opération consiste, dans un premier temps à résoudre l'équation caractéristique pour obtenir les valeurs propres ω_n^2 :

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

Dans un second temps, pour chaque ω_n , on résout le système (2.3) pour chaque ω_n afin d'identifier le vecteur propre $\mathbf{X}_n$ associé à ω_n :

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \mathbf{X}_n = 0, \quad (2.4)$$

qui admet des solutions non-nulles puisque $\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}$ est singulière.

Les pulsations propres ω_n^2 permettent de trouver les fonctions $p_n(t)$, aussi appelées **coordonnées modales**:

$$\ddot{p}_n + \omega_n^2 p_n = 0 \quad \Rightarrow \quad p_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t.$$

La solution générale de l'équation de la dynamique peut donc s'écrire:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{X}_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (2.5)$$

2.4.1.1 Notation matricielle de la décomposition modale

La décomposition en mode propres peut s'écrire comme un produit matrice-vecteur:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} \mathbf{p}(t), \text{ où } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_N \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_N(t) \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathbf{X}$ est appelée **matrice modale**. C'est une matrice de changement de base, qui passe de la base des modes propres à la base des degrés de libertés généralisés (la base "physique").

i Note

Comme les modes propres sont linéairement indépendants et que $\mathbf{X}$ est carrée, $\mathbf{X}$ est inversible.

2.4.2 Interprétation physique

Les valeurs propres ω_n sont les N pulsations auxquelles le système peut vibrer naturellement.

La contribution relative d'une coordonnée généralisée x_n au mouvement global est indiquée par la coordonnée correspondante du mode propre $\mathbf{X}_n$. Cette contribution est immuable.

Le système adopte, à la fréquence ω_n un mode de vibration naturel, appelé mode propre et décrit par le vecteur $\mathbf{X}_n$.

2.4.3 Propriétés de la base modale

On a établi que tous les modes propres sont solution de la relation (2.4), pour un mode $\mathbf{X}_n$ on a donc:

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_n^2) \mathbf{X}_n = 0 \Leftrightarrow \mathbf{K}\mathbf{X}_n = \omega_n^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_n \quad (2.6)$$

On peut multiplier (2.6) par un autre vecteur propre transposé :

$$\mathbf{X}_m^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n = \omega_n^2 \mathbf{X}_m^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n \quad (2.7)$$

Pour le mode $\mathbf{X}_m$, on peut écrire de la même manière

$$\mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_m = \omega_m^2 \mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_m \quad (2.8)$$

Les matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ étant symétriques, on a:

$$\mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_m = \mathbf{X}_m^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_m = \mathbf{X}_m^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n$$

En soustrayant les relations (2.7) et (2.8), on a donc :

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \mathbf{X}_m^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n = 0$$

Par conséquent :

$$\mathbf{X}_m^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n = \delta_{mn} \tilde{m}_n$$

C'est la première **relation d'orthogonalité des modes propres**. On dit que les modes propres sont **M-orthogonaux**. La constante m_n est appelée **masse modale** du mode n . C'est la masse mobilisée par le mode.

On montre de la même manière :

$$\mathbf{X}_m^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n = \delta_{mn} \tilde{k}_n$$

On dit que les modes propres sont **K**-orthogonaux. La constante k_n est appelée **raideur modale** du mode n .

Dans ce paragraphe on a établi que les modes propres du système constituent une base de vecteurs orthogonaux. Dans les développements suivant, on fera systématiquement usage de cette propriété pour simplifier les équations du mouvement dans les cas des vibrations libres et forcées.

2.4.4 Matrices modales ou réduites

En généralisant les relations d'orthogonalité à tous les modes, des matrices réduites à une diagonale :

- la **matrice modale d'inertie**:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{m}_n & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \tilde{m}_N \end{pmatrix} = \mathbf{M}_p$$

- la **matrice modale de raideur**:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \tilde{k}_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{k}_m & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \tilde{k}_N \end{pmatrix} = \mathbf{K}_p$$

- la **matrice des pulsations propres**

$$\Delta = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{K}_p = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{k}_1}{\tilde{m}_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\tilde{k}_r}{\tilde{m}_r} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{\tilde{k}_N}{\tilde{m}_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \omega_r^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{pmatrix}$$

2.4.5 Normalisation des modes propres

La relation (2.4) permet d'identifier les modes propres à un coefficient prêt. Or il convient d'accorder à chaque élément de la base une contribution identique. C'est l'objet de la normalisation.

2.4.5.1 Conventions de normalisation usuelles

Les modes normaux.

Le choix de normalisation le plus courant transforme la matrice modale d'inertie en la matrice identité :

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{I}$$

On montre aisément alors que la matrice modale de raideur se réduit à la matrice des valeurs propres :

$$\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} = \Delta$$

Les modes ainsi obtenus sont appelés modes normaux.

Une composante unitaire.

Cette convention impose qu'une des composantes des vecteurs propres (la même pour tous) soit égale à 1. Les autres coordonnées sont obtenues en divisant toutes les coordonnées issue de la résolution de (2.4) par la valeur de la coordonnée choisie.

La norme unitaire.

Dans ce cas on choisit d'affecter à tous les vecteurs propres une norme égale à 1

La masse modale unique

Ici on corrige les composantes de sorte que tous les modes propres aient une même masse modale, par exemple la masse totale.

Le choix de la convention de normalisation est arbitraire, mais les valeurs relatives des composantes modales sont indépendantes de la convention choisie.

2.4.6 Équations du mouvement libre dans la base modale

Travailler dans la base modale permet de simplifier notablement les équations du mouvement en supprimant les termes de couplage entre les coordonnées généralisées. Partant de la base physique des coordonnées généralisées, on peut transformer l'équation du mouvement pour l'exprimer dans celle des modes propres:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = 0$$

Changement de base : $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} \mathbf{p}(t)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \mathbf{M} \mathbf{X} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K} \mathbf{X} \mathbf{p} = 0 \\ (\mathbf{X}^T \times) &\Leftrightarrow \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} \mathbf{p} = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_p \mathbf{p} = 0 \end{aligned}$$

A cette étape, le système est découplé :

$$\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_p \mathbf{p} = 0$$

Mais on peut aller plus loin :

$$(\mathbf{M}_p^{-1} \times) \Leftrightarrow \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{K}_p \mathbf{p} = 0$$

L'équation du mouvement libre exprimée sur les variations des modes propres s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) + \Delta \mathbf{p}(t) = 0$$

Elle ne fait plus intervenir que des matrices diagonales. Les termes de couplage ont disparu.

2.4.7 Réponse libre à un état initial imposé

Comme pour l'oscillateur simple, il faut deux conditions initiales, une sur la position et une sur la vitesse :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(0) &= \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

Pour trouver les constantes A_n et B_n de l'Équation 2.5, il faut trouver $\mathbf{p}(0)$ et $\dot{\mathbf{p}}(0)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{X} \mathbf{p}(0) = \mathbf{x}_0 \\ (\mathbf{M} \times) &\Leftrightarrow \mathbf{M} \mathbf{X} \mathbf{p}(0) = \mathbf{M} \mathbf{x}_0 \\ (\mathbf{X}^T \times) &\Leftrightarrow \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \mathbf{p}(0) = \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 \\ (\mathbf{M}_p^{-1} \times) &\Leftrightarrow \mathbf{p}(0) = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

De la même façon, on a:

$$\dot{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{v}_0$$

Sous forme scalaire, on peut écrire:

$$\begin{aligned} p_n(0) &= \frac{\mathbf{x}_n^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0}{\tilde{m}_n} \\ \dot{p}_n(0) &= \frac{\mathbf{x}_n^T \mathbf{M} \mathbf{v}_0}{\tilde{m}_n} \end{aligned}$$

i Note

Si $\mathbf{M}\mathbf{x}_0$ est colinéaire à un mode $\mathbf{X}_i$ et $\mathbf{M}\mathbf{v}_0$ est colinéaire à un mode $\mathbf{X}_j$, alors $\mathbf{X}_i$ et $\mathbf{X}_j$ sont les deux seuls modes présents dans la réponse libre du système. Cela se déduit du produit scalaire $\mathbf{X}_n^T \mathbf{M}\mathbf{x}_0$.

2.5 Mouvement forcé

On cherche maintenant à établir l'expression de la réponse du système discrétisé toujours conservatif, lorsqu'il subit une excitation extérieure plus ou moins durable. Cette excitation doit être prise en compte dans l'équation d'équilibre dynamique. Pour cela on doit identifier la puissance apportée par cette action extérieure et la répartir sur les coordonnées généralisées.

2.5.1 Identification des efforts généralisés

On considère l'ensemble des forces et moments appliqués au système pour exprimer la puissance totale qu'ils exercent dans la base des coordonnées généralisées. Cette puissance s'écrit en fonction des vitesses généralisées $\dot{\mathbf{x}}$. Aux translations sont affectées des forces, aux rotations des moments :

$$\mathcal{P} = \sum_i Q_i(t) \dot{x}_i = \mathbf{Q}^t \dot{\mathbf{x}}$$

Les composantes du vecteur $\mathbf{Q}$ sont les efforts généralisés. L'équation du mouvement s'écrit finalement sous forme matricielle:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{Q} \quad (2.9)$$

2.5.2 Passage dans la base modale

On exprime l'équation (2.9) sur les coordonnées modales (Changement de base $\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{p}$) :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} &= \mathbf{Q} \\ \Leftrightarrow \mathbf{X}^t \mathbf{M} \mathbf{X} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{X}^t \mathbf{K} \mathbf{X} \mathbf{p} &= \mathbf{X}^t \mathbf{Q} \end{aligned}$$

On introduit le vecteur des **efforts modaux** : $\mathbf{Q}_p = \mathbf{X}^t \mathbf{Q}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_p \mathbf{p} &= \mathbf{Q}_p \\ \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p} &= \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{Q}_p \end{aligned}$$

L'équation du mouvement forcé dans la base modale s'écrit donc :

$$\ddot{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p} = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{Q}_p$$

Les matrices impliquées dans cette équation étant diagonales, les équations sont découplées et leur résolution permet d'obtenir simplement la variation temporelle des coordonnées modales $\mathbf{p}(t)$. A partir de ces expressions on obtient directement l'évolution temporelle des coordonnées généralisées, c'est à dire des déplacements physiques, par l'opération:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}\mathbf{p}(t)$$

2.5.3 Réponse forcée à une excitation harmonique

Rappelons qu'une excitation permanente quelconque peut être décomposée par la transformée de Fourier en une somme continue de fonctions harmoniques pondérées par le spectre de l'excitation. Dans le cas des systèmes linéaires comme ceux qui sont considérés ici, la réponse à une telle excitation est simplement la superposition des réponses obtenues pour chaque fréquence.

Soit Ω la fréquence angulaire de la composante harmonique considérée de l'excitation. L'effort généralisé associé s'écrit :

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{E} \cos(\Omega t)$$

Le vecteur $\mathbf{E}$ est constitué des parts de l'effort réparties sur les coordonnées généralisées.

La réponse présente la même fréquence que l'excitation. On a donc pour l'ensemble des coordonnées généralisées ou modales :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A} \cos(\Omega t) & \ddot{\mathbf{q}}(t) &= -\Omega^2 \mathbf{A} \cos(\Omega t) \\ \mathbf{p}(t) &= \mathbf{P} \cos(\Omega t) & \ddot{\mathbf{p}}(t) &= -\Omega^2 \mathbf{P} \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

A la fin on veut obtenir le vecteur $\mathbf{A}$ des amplitudes des coordonnées généralisées. Pour cela on commence par déterminer les amplitudes des coordonnées modales $\mathbf{P}$.

L'équation du mouvement forcé en base modale devient :

$$\ddot{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p} = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{Q}(t) \quad \Leftrightarrow \quad (\Delta - \Omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{P} = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{E}$$

2.5.3.1 Réponse modale

On obtient facilement le vecteur des amplitudes des coordonnées modales, c'est à dire les fonctions de réponse en fréquence (FRF) des coordonnées modales:

$$\mathbf{P}(\Omega) = (\Delta - \Omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{E}$$

Et la réponse harmonique temporelle des modes s'écrit simplement :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}(\Omega) \cos(\Omega t)$$

Sous forme explicite, on peut écrire pour le mode r :

$$p_r(t) = \frac{\sum_i X_{ir} E_i}{m_r(\omega_r^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t)$$

Le dénominateur indique que chaque mode résonne à la fréquence propre qui lui est associée.

Le numérateur, par ailleurs, montre qu'une coordonnée généralisée contribue à la mobilisation d'un mode à proportion conjointe de sa contribution à l'effort généralisé et de sa contribution au mode.

2.5.3.2 Réponse physique

Le mouvement réel global de la structure est donné par $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}\mathbf{p}(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\Delta - \Omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{E} \cos \Omega t$$

Pour chaque point j de la structure on peut expliciter le mouvement :

$$x_j(t) = \sum_r X_{jr} p_r(t) = \sum_{r,i} \frac{X_{jr} X_{ir} E_i}{m_r(\omega_r^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t)$$

2.5.3.3 Quelques remarques sur les modes propres

- Lorsque le système vibre selon un **mode propre**, toutes les **cordonnées généralisées**
 - évoluent en phase ou en opposition de phase
 - à la fréquence propre associée au mode propre.
- Pour que le système vibre selon un **mode propre**, il suffit :
 - *en mouvement libre* : de choisir une déformation initiale proportionnelle au vecteur propre associé.
 - *en mouvement forcé* : d'exciter le système à la fréquence propre correspondante en un point qui n'est pas un noeud de vibrations du mode considéré.
- Pour une déformation initiale quelconque le mouvement libre résultant est une combinaison linéaire de tous les modes propres.
- Pour une excitation de fréquence quelconque, le mouvement permanent résultant est une combinaison linéaire de tous les modes propres.

2.6 Systèmes dissipatifs

Pour une modélisation plus conforme à l'observation des systèmes réels, il faut introduire des paramètres qui traduisent la dissipation de l'énergie. Il s'agit de rendre compte en particulier de la décroissance de l'amplitude du mouvement libre au cours du temps, et aussi de la limitation de l'amplitude du mouvement forcé à la résonance ou encore du déphasage entre l'excitation et la réponse.

2.6.1 Modèle d'amortissement

La dissipation de l'énergie responsable de ces phénomènes provient de frottements externes ou structuraux. Le modèle d'amortissement visqueux de Rayleigh traduit ces frottements par des forces résistives proportionnelles à la vitesse :

$$\vec{F}_v = -a\vec{v}$$

Fonction de dissipation = fonction de Rayleigh :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}$$

(Ses dérivées par rapport aux VGs donnent les forces dissipatives)

C est la **matrice de dissipation** symétrique.

Systèmes dissipatifs à N DDL Équation du mouvement avec amortissement

- Efforts généralisés dûs aux frottements visqueux :

$$F_i = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i}$$

- Équations de Lagrange du système dissipatif :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \Leftrightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

- la i -ème ligne est la i -ème équation du mouvement :

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j + c_{ij} \dot{q}_j + k_{ij} q_j = Q_i$$

- **Problème** : **M**, **C**, **K** ne sont pas diagonalisables simultanément
- $\Rightarrow$ Impossible de découpler les équations dans la base modale

Systèmes dissipatifs à N DDL Réponse du système libre - Forme générale

- On cherche la solution générale de l'équation du mouvement:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

- Solutions de la forme :

$$\mathbf{q} = \mathbf{X}e^{\lambda_r t}$$

- Inconnues : $\lambda_r, \mathbf{X}$
- On a aussi : $\dot{\mathbf{q}} = \lambda_r \mathbf{X}e^{\lambda_r t}$ et $\ddot{\mathbf{q}} = \lambda_r^2 \mathbf{X}e^{\lambda_r t}$
- On substitue ces solutions dans Équation 2.10 :

$$(\lambda_r^2 \mathbf{M} + \lambda_r \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

- Solutions non triviales ($\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$) $\Leftrightarrow$ déterminant nul.

Systèmes dissipatifs à N DDL Réponse du système libre - Équation caractéristique

$$\lambda_r^2 \mathbf{M} + \lambda_r \mathbf{C} + \mathbf{K} = \mathbf{0}$$

Les N racines $\lambda_r (r = 1, \dots, n)$ peuvent prendre plusieurs forme :

- *Réelles positives* : déplacements apériodiques décroissants, le système n'est pas vibratoire.
- **Complexes conjuguées** , partie réelle < 0 :

$$\lambda_r = -\underbrace{\alpha_r}_{>0} \pm i\omega_r = (\lambda_{r+}, \lambda_{r-})$$

- Cas le plus fréquemment étudié
- Modes complexes conjugués
- Leur combinaison donne des oscillations amorties.

- *Imaginaires pures conjuguées* , cas exceptionnel dû à des forces d'amortissement particulières.

Systèmes dissipatifs à N DDL Cas particuliers d'amortissement : Relation de Caughey

- Si $\mathbf{M}, \mathbf{K}$ et $\mathbf{C}$ non diagonalisables simultanément
 $\Rightarrow$ pas base de vecteurs propres orthonormée
 On n'étudiera pas ce cas
- Mais $\exists$ des cas où les 3 matrices sont simultanément diagonalisables
Relation de Caughey : Condition suffisante sur $\mathbf{C}$:

$$\boxed{\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}}$$

$\rightarrow$ Alors le découplage est possible.

- Cas particulier souvent supposé dans les modèles :
l'amortissement proportionnel

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$$

a et b sont quelconques.

Systèmes dissipatifs à N DDL Cas particulier de l'amortissement proportionnel **Amortissement proportionnel** :

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$$

- La matrice d'amortissement $\mathbf{C}$ se diagonalise dans la même base propre que $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{X}^t \mathbf{C} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c_r & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & c_N \end{pmatrix}$$

Les c_r sont les **coefficients d'amortissement modaux**.

- Les modes propres sont à nouveau réels et orthogonaux
- Ce sont les modes propres du système conservatif.
- Ils sont réunis dans la matrice modale $\mathbf{X}$

Systèmes dissipatifs à N DDL Réponse libre avec amortissement proportionnel

- On introduit la matrice modale dans l'équation du mouvement.

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{X}^t \mathbf{M} \mathbf{X} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{X}^t \mathbf{C} \mathbf{X} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{X}^t \mathbf{K} \mathbf{X} \mathbf{p} = 0 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_p \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_p \mathbf{p} = 0 \end{aligned}$$

- Matrices diagonales $\rightarrow$ système de N équations découplées

$$m_r \ddot{p}_r + c_r \dot{p}_r + k_r p_r = 0 \quad (r = 1, \dots, n)$$

- Ce sont les équations d'oscillateurs dissipatifs élémentaires
- Elles s'expriment sur les coordonnées modales.

Systèmes dissipatifs à N DDL Réponse libre avec amortissement proportionnel - Formulation matricielle

L'équation du mouvement avec amortissement proportionnel s'écrit :

$$\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_p \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_p \mathbf{p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{C}_p \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{K}_p \mathbf{p} = 0$$

- On obtient les équations découplées en coordonnées modales :

$$\ddot{p}_r + \frac{c_r}{m_r} \dot{p}_r + \frac{k_r}{m_r} p_r = 0 \quad (r = 1, \dots, n)$$

On définit :

$$\omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad 2\lambda_r = \frac{c_r}{m_r}$$

Et les matrices diagonales associées :

$$\Delta = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{K}_p = (\mathbf{X}^t \mathbf{M} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^t \mathbf{K} \mathbf{X}) = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{X}$$

$$2\Lambda = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{C}_p = (\mathbf{X}^t \mathbf{M} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^t \mathbf{C} \mathbf{X}) = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{X}$$

Systèmes dissipatifs à N DDL Réponse libre avec amortissement proportionnel - Formulation matricielle

L'équation matricielle s'écrit alors :

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{C}_p \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{K}_p \mathbf{p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\mathbf{p}} + 2\Lambda \dot{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p} = 0$$

- N équations découplées nouvelles:

$$\ddot{p}_r + 2\lambda_r \dot{p}_r + \omega_r^2 p_r = 0 \quad (r = 1, \dots, N)$$

- λ_r : **coefficients d'amortissement modaux**.
- On reprend l'écriture habituelle :

$$\ddot{p}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{p}_r + \omega_r^2 p_r = 0 \quad (r = 1, \dots, N)$$

- $\xi_r = \frac{\lambda_r}{\omega_r}$: **facteurs d'amortissements modaux**, ou amortissements relatifs modaux.

Systèmes dissipatifs à N DDL Réponse forcée - Amortissement proportionnel - Cas d'une force harmonique La résolution est identique au cas sans amortissement.

- Soit un effort généralisé harmonique de pulsation Ω :

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{E} \cos(\Omega t) \Leftrightarrow Q_i(t) = E_i \cos(\Omega t)$$

Notation complexe pour simplifier : $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{E} e^{j\Omega t}$

- Réponse harmonique de même pulsation:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P} e^{j\Omega t}$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = j\Omega \mathbf{P} e^{j\Omega t}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = -\Omega^2 \mathbf{P} e^{j\Omega t}$$

$\mathbf{P}$: vecteur des amplitudes complexes des coordonnées modales

- L'équation du mouvement forcé en base modale devient :

$$\ddot{\mathbf{p}} + 2\Lambda \dot{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p} = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{Q}(t) \quad (2.11)$$

$$\Leftrightarrow (\Delta - \Omega^2 \mathbf{I} + 2i\Omega \Lambda) \mathbf{P} = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{E} \quad (2.12)$$

Systèmes dissipatifs à N DDL Réponse en fréquence - Amortissement proportionnel

- L'équation du mouvement se simplifie :

$$(\Delta - \Omega^2 \mathbf{I} + 2i\Omega \Lambda) \mathbf{P} = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{E}$$

- Le Vecteur des amplitudes complexes des coordonnées modales est :

$$\mathbf{P}(\Omega) = (\Delta - \Omega^2 \mathbf{I} + 2i\Omega \Lambda)^{-1} \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{E}$$

- Finalement l'amplitude de chaque coordonnée modale $p_r(\Omega)$ s'écrit :

$$P_r(\Omega) = \sum_i \frac{1}{m_r} \frac{X_{ir} E_i}{\omega_r^2 - \Omega^2 + 2j\Omega \lambda_r} = \sum_i \frac{1}{m_r} \frac{X_{ir} E_i}{\omega_r^2 - \Omega^2 + 2j\xi_r \Omega \omega_r}$$

- On revient aux coordonnées généralisées (mouvement réel) par :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{X} \mathbf{p}(t)$$

Systèmes dissipatifs à N DDL Réponse forcée harmonique - Amortissement proportionnel

- Pour chaque point j de la structure :

$$q_j(t) = \sum_r X_{jr} p_r(t) = \sum_{r,i} \frac{1}{m_r} \frac{X_{jr} X_{ir} E_i}{\omega_r^2 - \Omega^2 + 2j\xi_r \Omega \omega_r} e^{i\Omega t}$$

- En considérant l'amplitude et la phase du mode r :

$$P_r(\Omega) = \frac{1}{m_r \sqrt{(\omega_r^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_r^2 \omega_r^2 \Omega^2}} \quad \text{et} \quad \phi_r = \arctan\left(\frac{-2\xi_r \omega_r}{\omega_r^2 - \Omega^2}\right)$$

- On a l'expression réelle du mouvement harmonique forcé des C.G.

$$q_j(t) = \sum_{r,i} \frac{X_{jr} X_{ir} E_i}{m_r \sqrt{(\omega_r^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_r^2 \omega_r^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \phi_r)$$

2.7 Méthodes approchées

D'après l'équation des modes propres $\mathbf{K}\mathbf{X}_n = \omega_n^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_n$, on a l'égalité suivante:

$$\mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n = \omega_n^2 \mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n \quad \Leftrightarrow \quad \omega_n^2 = \frac{\mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n}{\mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n},$$

quelle que soit la normalisation choisie pour les modes propres. On définit pour un vecteur $\mathbf{v}$ arbitraire le **quotient de Rayleigh** $R(\mathbf{v})$:

$$R(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}} = \frac{U(\mathbf{v})}{T(\mathbf{v})}$$

La fonction $R(\mathbf{v})$ est égale à ω_n^2 si $\mathbf{v} = \mathbf{X}_n$, mais elle donne une bonne approximation de la fréquence propre si $\mathbf{v} = \mathbf{X}_n + \mathbf{e}$, on a:

$$R(\mathbf{X}_n + \mathbf{e}) \approx R(\mathbf{X}_n) + O(\|\mathbf{e}\|^2).$$

On peut aussi montrer que $\omega_1^2 \leq R(\mathbf{v}) \leq \omega_N^2$ pour tout $\mathbf{v}$.

2.7.1 Méthode de Rayleigh pour la fréquence fondamentale

On peut donc “deviner” les fréquences propres si l’on dispose d’une bonne approximation des modes propres. Une façon d’obtenir une bonne approximation de la plus faible fréquence propre est de résoudre le déplacement $\mathbf{x}_{\text{sta}}$ en supposant l’accélération $\ddot{\mathbf{x}}$ égale pour chaque degré de liberté, c’est-à-dire:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}\mathbf{a} + K\mathbf{x}_{\text{sta}} = \mathbf{0} \Rightarrow K\mathbf{x}_{\text{sta}} = -\mathbf{M}\mathbf{a}$$

Le vecteur de déplacement statique $\mathbf{x}_{\text{sta}}$ donne une bonne approximation du premier mode propre, et on a:

$$\sqrt{R(\mathbf{x}_{\text{sta}})} \approx \omega_1.$$

i Note

Ce [notebook](#) démontre l’application de la méthode de Rayleigh, avec une erreur finale sur la fréquence fondamentale de 0.07% !

2.7.2 Méthode de Rayleigh-Ritz pour réduire le nombre de degrés de liberté

Un système à N_T degrés de libertés peut être réduit à $N < N_T$ degrés de liberté si on *présuppose* les déformations possibles du systèmes.

Soit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$ une famille de vecteurs linéairement indépendants avec $N < N_T$ et fixés *a priori*. On suppose une fonction du déplacement $\mathbf{x}_h(t)$ donnée par ces vecteurs, soit:

$$\mathbf{x}_h(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{v}_n a_n(t) = \mathbf{V}\mathbf{a}(t),$$

où $\mathbf{V}$ contient les vecteurs $\mathbf{v}_n$ en colonnes et $\mathbf{a}(t) = (a_1(t) \dots a_N(t))$. En remplaçant $\mathbf{x}_h$ dans l’énergie cinétique et potentielle on a:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}_h) &= \frac{1}{2}(\mathbf{V}\mathbf{a})^T \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{M}_V \mathbf{a} \\ U(\mathbf{x}_h) &= \frac{1}{2}(\mathbf{V}\mathbf{a})^T \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K}_V \mathbf{a} \end{aligned}$$

Cela définit deux nouvelles matrices:

- une matrice d'inertie réduite $\mathbf{M}_V = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$
- une matrice de raideur réduite $\mathbf{K}_V = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}$

Et les degrés de libertés sont maintenant les fonctions $a_n(t)$. On peut alors procéder à la même analyse que pour N_T degrés de liberté, et diagonaliser:

$$\mathbf{K}_V \mathbf{X}_{n,V} = \omega_{n,V}^2 \mathbf{M}_V \mathbf{X}_{n,V}$$

Les modes propres $X_{n,V}$ sont des approximations des N modes propres contenus dans $\text{Vect}(\mathbf{V})$, le sous-espace vectoriel des colonnes de $\mathbf{V}$. Puisque l'on a réduit le nombre de degrés de libertés, certains modes propres sont totalement absents de l'analyse et l'on ne pourra pas obtenir leur fréquence propre.

i Note

Les vecteurs $\mathbf{v}_n$ formant la base réduite des degrés de liberté n'ont pas besoin d'être des approximations des modes propres réels de la structure.

3 Vibrations de systèmes continus: éléments généraux et vibrations des barres

3.1 Introduction

Ce cours d'introduction aux vibrations des systèmes continus se limitera à l'étude des structures à une dimension (1D). Ces systèmes simples suffisent pour modéliser le comportement de nombreuses structures et, par extension, comprendre le comportement vibratoire de structures plus complexes. Ils sont aussi les constituants des modèles en éléments finis.

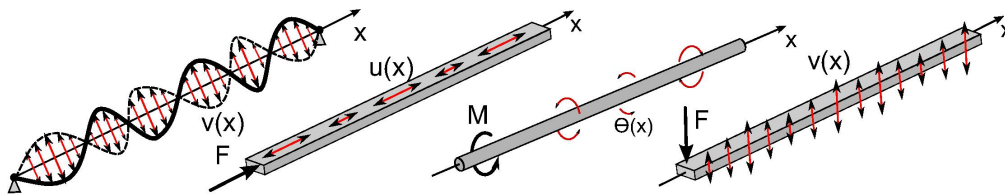


Figure 3.1: Les différents types de vibration dans les milieux 1D : vibration transverse d'une corde tendue, vibration longitudinale d'une barre, vibration d'une barre en torsion, vibration transverse d'une poutre.

Les structures considérées ont des caractéristiques géométriques communes : elles sont élancées, de longueur L finie et de section S constante.

Elles sont par ailleurs constituées dans un matériau homogène et isotrope avec des lois de comportement linéaires et sans dissipation d'énergie.

4 types de vibrations peuvent être étudiés dans ces conditions. Ils sont représentés sur la Figure 3.1.

- les vibrations transverses des cordes
- les vibrations longitudinales des poutres
- les vibrations de torsion des arbres
- les vibrations de flexion des poutres

Les 3 premières sont régies par une équation différentielle du second ordre : l'équation des ondes de d'Alembert. Les vibrations de flexion obéissent quant à elles à une équation différentielle d'ordre 4.

Cependant les développements mathématiques qui permettent d'obtenir leurs solutions sont semblables.

Pour traiter le cas de structures plus complexes (section variable, matériau inhomogène, masse ou raideur localisée,...) on fera appel dans la dernière partie à des méthodes approchées, analogues à celles présentées Section 2.7, qui permettent d'estimer les fréquences propres.

On traite pour commencer le cas des vibrations longitudinale dans les barres. La seconde partie considère le cas des ondes de flexion. Dans les deux cas, on commence par établir l'équation des ondes avant de la résoudre pour obtenir, d'une part l'expression des vibrations naturelles lorsque la structure est libre d'efforts, d'autre part, celle de leur réponse forcée en présence d'actions extérieures.

3.2 Vibrations longitudinales dans les barres

Les barres solides sont sujettes aux vibrations longitudinales (c'est-à-dire selon le long de leur longueur). Pour établir la vibration, on comment par définir l'énergie cinétique d'une barre de longueur L , de masse volumique $\rho(x)$ et de section $S(x)$.

On note $u(x, t)$ le déplacement longitudinal à l'instant t d'un point x de la barre. Chaque tranche dx (de masse dm) de barre a l'énergie cinétique:

$$dT = \frac{1}{2}dm \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2}\rho S dx \dot{u}^2$$

Pour calculer l'énergie cinétique totale de la barre, on intègre:

$$T(\dot{u}) = \int_0^L dT = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \dot{u}^2 dx \quad (3.1)$$

Pour l'énergie potentielle élastique, on sait que le déplacement de la barre est longitudinal, donc que la déformation longitudinale est *constante* dans chaque section de la barre est vaut $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

L'énergie potentielle élastique due à une déformation longitudinale est donc donnée par:

$$U(u) = \int_0^L \int_S \frac{1}{2} E \varepsilon_{xx}^2 dS dx = \frac{1}{2} \int_0^L ES \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L ES u'^2 dx, \quad (3.2)$$

où $E(x)$ est le module d'Young de la barre élastique.

3.2.0.1 Conditions limites

En $x = 0$ et $x = L$ on a deux options:

- Le déplacement u est bloqué ($u = 0$) et un effort normal N inconnu est appliqué à la structure par réaction d'appui.
- Le déplacement u est libre car l'effort normal N est nul.

L'effort normal est donné par la résultante des contraintes longitudinales:

$$N(x) = \int_S \sigma_{xx}(x) \, dx = \sigma_{xx} S = ES \varepsilon_{xx} = ES \frac{\partial u}{\partial x} = ES u' \quad (3.3)$$

On a donc les possibilités suivantes:

Table 3.1: Conditions limites possibles pour une barre

Position	Encastrement	Bord libre
$x = 0$	$u(0) = 0$	$N(0) = ES u'(0) = 0$
$x = L$	$u(L) = 0$	$N(L) = ES u'(L) = 0$

3.2.1 Euler-Lagrange – Analogie avec les systèmes discrets

Dans les systèmes discrets, les énergies cinétique et potentielle sont des formes quadratiques du vecteur déplacement $\mathbf{u}$ et vitesse $\dot{\mathbf{u}}$:

$$T(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}, \quad U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (3.4)$$

On opère un changement de notation: notons $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$ le produit scalaire de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Notons également $M(\mathbf{v}) = \mathbf{M} \mathbf{v}$ l'application linéaire qui correspond à la matrice $\mathbf{M}$. De même, notons $K(\mathbf{u}) = \mathbf{K} \mathbf{u}$ l'application linéaire correspondant à $\mathbf{K}$. On a alors:

$$T(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{u}}, M(\dot{\mathbf{u}}) \rangle, \quad U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}, K(\mathbf{u}) \rangle$$

Appliquons ces notations au cas continu. Le produit scalaire de deux fonctions peut s'écrire:

$$\langle u, v \rangle = \int_0^L u(x) v(x) \, dx$$

On remarque que les énergies du cas continu, données par Équation 3.1 et Équation 3.2, sont aussi des formes quadratiques de $\dot{u}$ et u . On peut donc trouver les applications linéaires M et K pour exprimer les énergies:

$$T(\dot{u}) = \frac{1}{2} \langle \dot{u}, M(\dot{u}) \rangle, \quad U(u) = \frac{1}{2} \langle u, K(u) \rangle$$

M est facilement identifiée, on a

$$M(\dot{u}) = \rho S \dot{u}.$$

K est plus difficile, il faut intégrer l'énergie potentielle par parties:

$$\begin{aligned} U(u) &= \frac{1}{2} \int_0^L ES(u' \cdot u') \, dx \\ &= [ESu' \cdot u]_{x=0}^{x=L} - \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} (ESu') \cdot u \, dx \end{aligned}$$

Le terme de bord $[ESu' \cdot u]_{x=0}^{x=L}$ est nul si on considère les conditions limites, voir Table 3.1. On peut donc écrire l'énergie potentielle comme:

$$U(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u \cdot \frac{\partial}{\partial x} (-ESu') \, dx$$

d'où on peut identifier K :

$$K(u) = -\frac{\partial}{\partial x} (ESu').$$

K est bien une application linéaire, on pourra vérifier que $K(\alpha u + \beta v) = \alpha K(u) + \beta K(v)$, puisque la dérivée est une opération linéaire.

i Note 3: Remarque

Tout comme les matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ des systèmes discrets sont **symétriques** et **définies-positives**, les applications linéaires M et K le sont aussi, c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} \langle v, K(u) \rangle &= \langle u, K(v) \rangle & \forall v, u \\ \langle u, K(u) \rangle &\geq 0 & \forall u \\ \langle v, M(u) \rangle &= \langle u, M(v) \rangle & \forall v, u \\ \langle u, M(u) \rangle &\geq 0 & \forall u \end{aligned}$$

Enfin, si l'équation de la dynamique pour les systèmes discrets peut s'écrire, grace à Euler-Lagrange:

$$M(\ddot{\mathbf{u}}) + K(\mathbf{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0,$$

cela veut dire que l'on peut écrire la même équation pour le cas continu et obtenir l'équation du mouvement:

$$M(\ddot{u}) + K(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho S \ddot{u} - \frac{\partial}{\partial x}(ESu') = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

Si E et S sont constants par rapport à x , on a l'équation de d'Alembert:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Pour s'assurer qu'on a la bonne équation de dynamique, on re-dérivera cette équation par le principe fondamental de la dynamique.

3.2.1.1 Efforts externes

Dans le cas discret, pour calculer le vecteur des efforts externes généralisés, on cherche à évaluer le travail des forces externes sur un déplacement virtuel $\square \mathbf{u}$:

$$\delta W = \mathbf{Q} \cdot \square \mathbf{u} = \langle \mathbf{Q}, \square \mathbf{u} \rangle$$

On applique ici le même principe à deux cas de chargement externe: on cherche le travail virtuel de ces deux cas sous l'effet d'un champ de déformation virtuel $\delta u(x)$.

Force répartie

On considère une force linéique longitudinale $f(x, t)$ qui s'applique le long de la poutre. Le travail de cette force sur un champs de déplacement virtuel $\delta u(x)$ est :

$$\delta W = \int_0^L f(x, t) \delta u(x) dx = \langle f, \delta u \rangle$$

On a donc $Q = f$ et l'équation du mouvement s'écrit:

$$M(\ddot{u}) + K(u) = Q$$

Force ponctuelle

On considère une force $F(t)$ appliquée au point x_F de la barre. Le travail sur la déformée virtuelle δu est :

$$\delta W = F(t)\delta u(x_F) = \int_0^L F(t)\delta u(x)\delta(x - x_F) dx = \langle F(t)\delta(x - x_F), \delta u \rangle$$

On a fait apparaître la distribution de Dirac $\delta(x - x_F)$ pour pouvoir écrire le produit scalaire, en utilisant la propriété que $\int_0^L \delta u(x)\delta(x - x_F) dx = \delta u(x_F)$. L'équation du mouvement ci-dessus est donc valide pour $Q = F(t)\delta(x - x_F)$.

3.2.2 Dynamique d'une tranche de barre

Pour établir l'équation de mouvement longitudinal d'une barre, on va considérer un tronçon de barre entre les points x_0 et $x_0 + h$ choisis arbitrairement. En isolant ce tronçon, on fait apparaître des efforts internes, qui représentent l'effet du reste de la structure sur le tronçon.

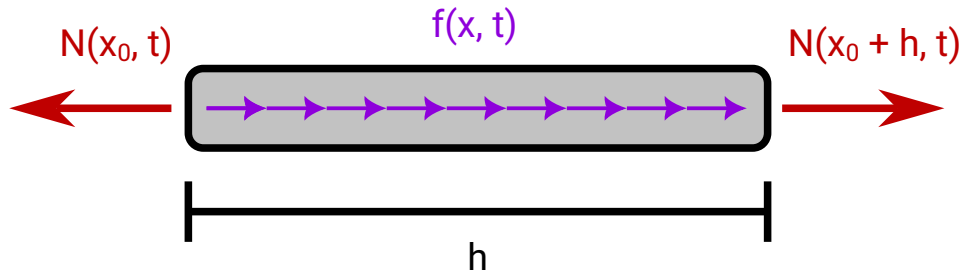


Figure 3.2: Forces longitudinales appliquées sur un morceau $[x_0, x_0 + h]$ de barre

$f(x, t)$ est une force externe répartie sur la longueur de la poutre. On note q_m la quantité de mouvement du tronçon, que l'on peut intégrer à partir de la quantité de mouvement $dq_m = dm\dot{u}$:

$$q_m = \int_{x_0}^{x_0+h} dq_m = \int_0^L \rho S \dot{u} dx$$

Pour appliquer la troisième loi de Newton, il faut la résultante de $f(x, t)$ sur le tronçon, c'est-à-dire $\int_0^L f(x, t) dx$, et la dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{dq_m}{dt} &= -N(x_0, t) + N(x_0 + h, t) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, t) dx \\
&\Leftrightarrow \int_{x_0}^{x_0+h} \rho S \ddot{u} dx = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, t) dx \\
&\Leftrightarrow \int_{x_0}^{x_0+h} \left(\rho S \ddot{u} - \frac{\partial N}{\partial x} - f(x, t) \right) dx = 0 \quad \forall x_0, h
\end{aligned}$$

Puisque l'équation est valide pour tout x_0 et tout h , on doit nécessairement avoir:

$$\rho S \ddot{u} = \frac{\partial N}{\partial x} + f.$$

En remplaçant l'effort normal pour un barre linéaire élastique $N = ESu'$ (3.3), on obtient la bonne équation:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f \quad \Leftrightarrow \quad M(\ddot{u}) + K(u) = Q.$$

3.2.3 Découplage des équations homogènes

Maintenant que l'on a établi l'équation de mouvement longitudinal, on va appliquer le même raisonnement que pour le cas discret en Section 2.4.1.

On postule une solution de la forme :

$$u(x, t) = X(x)p(t).$$

De même que pour le cas discret, la fonction X donne la "forme spatiale" de la solution et $p(t)$ l'oscillation en temps. En substituant dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$M(X)\ddot{p} + K(X)p = 0.$$

On peut réécrire cette équation sous la forme d'un déterminant nul :

$$\begin{vmatrix} \ddot{p} & p \\ -K(X) & M(X) \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui implique que la matrice 2×2 ci-dessus est singulière. Il existe donc λ tel que:

$$\begin{cases} \ddot{p} + \lambda p = 0 \\ K(X) = \lambda M(X) \end{cases} \quad (3.5)$$

On reconnaît le problème aux valeurs propre généralisé. Comme pour le cas discret, en prenant le produit scalaire par X de la deuxième équation, on a :

$$\lambda = \frac{\langle X, K(X) \rangle}{\langle X, M(X) \rangle} = \frac{U(X)}{T(X)} \geq 0.$$

La première équation est donc celle d'un oscillateur harmonique, et l'on peut exprimer $\lambda = \omega^2$. Équation 3.5 peut donc s'écrire comme:

$$\begin{cases} \ddot{p} + \omega^2 p = 0 \\ K(X) = \omega^2 M(X) \end{cases} \quad (3.6)$$

3.2.4 Identification des modes

Comme dans le cas discret, le problème aux valeurs propres donne à la fois la forme des modes et les pulsations propres associées.

Pour le cas des vibrations longitudinales (à coefficients constants), ce problème aux valeurs propres est une équation différentielle pour $X(x)$:

$$K(X) = \omega^2 M(X) \Leftrightarrow \omega^2 \rho S X + E S X'' = 0 \Leftrightarrow X'' + \frac{\rho}{E} \omega^2 X = 0.$$

On introduit les symboles suivants :

$$\begin{cases} c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \\ \gamma = \frac{\omega}{c} \end{cases} \quad (3.7)$$

La constante c est une vitesse: c'est la **vitesse de propagation des ondes longitudinales**. La Table 3.2 donne sa valeur pour quelques matériaux.

Table 3.2: Célérité des ondes longitudinales dans différents matériaux

Matériau	c (m/s)	Matériau	c (m/s)
PVC mou	80	Glace	3200
Sable sec	10-300	Hêtre	3300
Béton	3100	Aluminium	5035

Matériau	c (m/s)	Matériau	c (m/s)
Plomb	1200	Verre	5300
PVC dur	1700	Acier	5600-5900
Granit	6200	Péridotite ¹	7700

Par analyse dimensionnelle, γ est l'inverse d'une longueur, une "fréquence spatiale" en quelque sorte. C'est le **nombre d'onde**. La deuxième équation du système (3.7), qui relie fréquence temporelle et spatiale, est appelée **relation de dispersion**. Dans le cas des vibrations longitudinales, cette équation est linéaire.

On a finalement l'équation suivante pour $X(x)$:

$$X'' + \gamma^2 X = 0.$$

La solution générale de cette équation est maintenant familière:

$$X(x) = A \cos \gamma x + B \sin \gamma x. \quad (3.8)$$

Cette équation spatiale est accompagnée de conditions limites en $x = 0$ et $x = L$ (voir Table 3.1), qui déterminent A et B . On a trois options différentes pour les conditions limites, données par la Figure 3.3.

3.2.4.1 Cas encastré-encastré

Dans le cas où les deux bords sont libres, on a :

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0 &\Leftrightarrow X(0)p(t) = 0 \Leftrightarrow X(0) = 0 \\ u(L, t) = 0 &\Leftrightarrow X(L)p(t) = 0 \Leftrightarrow X(L) = 0 \end{aligned}$$

En remplaçant par la solution générale (3.8) on obtient:

$$\begin{cases} A = 0 \\ A \cos \gamma L + B \sin \gamma L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos \gamma L & \sin \gamma L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

Pour que l'on trouve des solutions non-nulles de ce système linéaire, il faut que la matrice 2×2 ci-dessus soit singulière, c'est-à-dire:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \gamma L & \sin \gamma L \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sin \gamma L = 0 \Rightarrow \gamma_n = \frac{\pi n}{L}, n = 1, \dots, \infty$$

¹Aussi connu sous le nom de théorème des axes parallèles, théorème de transport, théorème de Huygens-Steiner, c.f. [wikipedia](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Huygens-Steiner).

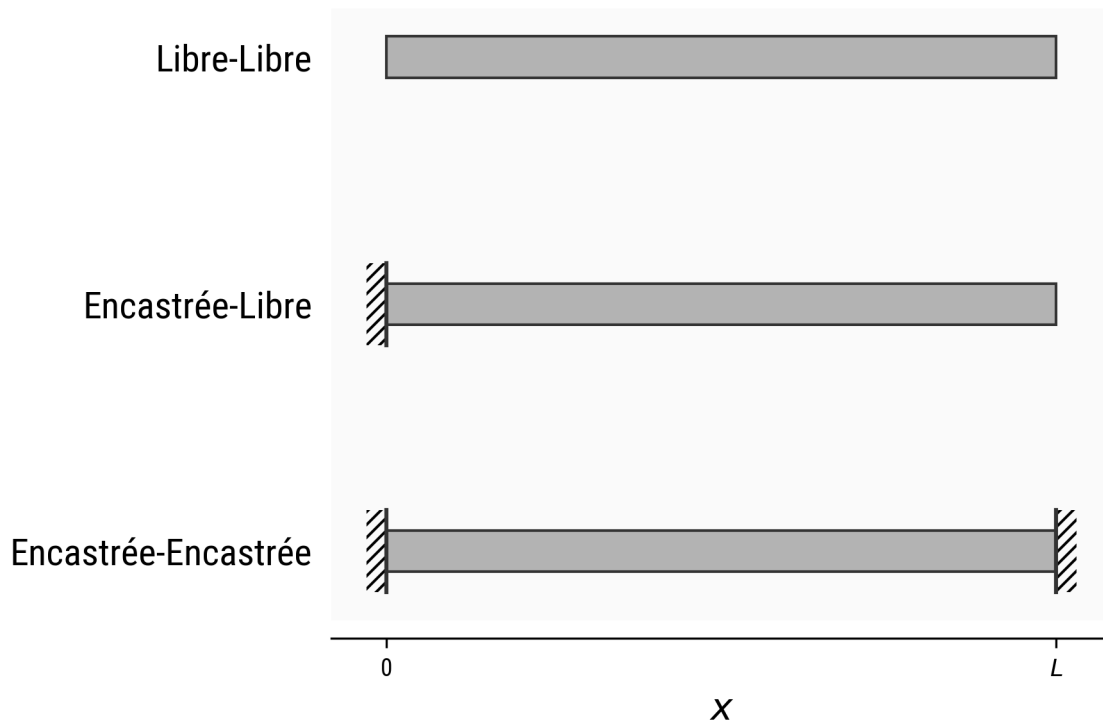


Figure 3.3: Possibilités de conditions limites pour une barre.

Pour que le mode $X(x)$ soit compatible avec les conditions limites, il faut que la “période spatiale” soit compatible avec la longueur de la barre. Il y a donc un ensemble infini mais dénombrable de modes propres $X_n, n = 1, \dots, \infty$.

i Remarque

Ce sont les conditions limites qui discrétisent l’ensemble possible des modes propres. En l’absence de bords, tous les $\gamma \in \mathbb{R}$ donnent des solutions et les modes propres ne sont pas dénombrables. C’est dans ce cadre que se déroule la seconde partie du cours sur la propagation d’ondes.

Pour notre choix de conditions limites, les modes s’expriment par:

$$X_n(x) = B_n \sin \gamma_n x = B_n \sin \left(\frac{\pi n}{L} x \right)$$

i Remarque

Comme pour le cas discret, tout multiple d’un mode propre X_n est aussi un mode propre: les constantes B_n (ou A_n selon les cas) sont donc arbitraires.

Si les nombres d'ondes γ_n sont dénombrables, alors les pulsations propres $\omega_n = \gamma_n c$ le sont aussi, et comme pour le cas discret, on peut construire par somme la solution générale du mouvement:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) p_n(t), \quad \text{avec} \quad p_n(t) = C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t.$$

3.2.5 Orthogonalité des modes

De la même façon que l'on a pour le cas discret :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}_n, \mathbf{M} \mathbf{X}_m \rangle &= 0 \quad \text{si } n \neq m, \\ \langle \mathbf{X}_n, \mathbf{K} \mathbf{X}_m \rangle &= 0 \quad \text{si } n \neq m, \end{aligned}$$

On a pour le cas continu :

$$\begin{aligned} \langle X_n, M(X_m) \rangle &= 0 \quad \text{si } n \neq m, \\ \langle X_n, K(X_m) \rangle &= 0 \quad \text{si } n \neq m. \end{aligned}$$

i Note

Cette propriété découle de la symétrie des applications linéaires M et K , voir Note 4.

Dans le cas des vibrations longitudinales, cela veut dire que :

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho S X_n X_m \, dx &= 0 \quad \text{si } n \neq m, \\ \int_0^L ES \frac{\partial X_n}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} \, dx &= 0 \quad \text{si } n \neq m. \end{aligned}$$

On peut aussi définir des masses et raideurs modales (qui dépendent de la normalisation des modes):

$$\begin{aligned} \langle X_n, M(X_n) \rangle &= \tilde{m}_n \\ \langle X_n, K(X_n) \rangle &= \tilde{k}_n \end{aligned}$$

Dans le cas des vibrations longitudinales, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_n &= \int_0^L \rho S X_n^2 \, dx, \\ \tilde{k}_n &= \int_0^L ES \left(\frac{\partial X_n}{\partial x} \right)^2 \, dx. \end{aligned}$$

L'orthogonalité permet d'exprimer les énergies comme une somme pour chaque mode:

$$T(\dot{u}) = \frac{1}{2} \langle \dot{u}, M(\dot{u}) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \tilde{m}_n \dot{p}_n^2$$

$$U(u) = \frac{1}{2} \langle u, K(u) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \tilde{k}_n p_n^2$$

3.2.6 Conditions initiales

Les constantes C_n et D_n des coordonnées modales $p_n(t)$ sont à déterminer à partir des conditions initiales:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad \dot{u}(x, 0) = u_1(x).$$

En injectant la solution générale, on a pour la première condition:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n p_n(0) = u_0 \\ \Leftrightarrow M \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n p_n(0) \right) &= M(u_0) \\ \Leftrightarrow \langle X_m, \sum_{n=1}^{\infty} M(X_n) p_n(0) \rangle &= \langle X_m, M(u_0) \rangle \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \langle X_m, M(X_n) \rangle p_n(0) &= \langle X_m, M(u_0) \rangle \\ \Leftrightarrow \langle X_m, M(X_m) \rangle p_m(0) &= \langle X_m, M(u_0) \rangle \\ \Leftrightarrow p_m(0) &= \frac{\langle X_m, M(u_0) \rangle}{\tilde{m}_m} \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient $\dot{p}_m(0)$ à partir de la vitesse initiale $u_1(x)$:

$$\dot{p}_m(0) = \frac{\langle X_m, M(u_1) \rangle}{\tilde{m}_m}$$

i Note

Si $M(u_0)$ est colinéaire à un mode X_i et $M(u_1)$ est colinéaire à un mode X_j , alors X_i et X_j sont les deux seuls modes présents dans la réponse libre du système. Cela se déduit du produit scalaire $\langle X_m, M(u_0) \rangle$.

3.2.7 Mouvement forcé

L'équation non-homogène du mouvement est :

$$M(\ddot{u}) + K(u) = Q(x, t).$$

Pour trouver une solution particulière, on applique la même procédure que dans le cas discret: on cherche une solution particulière de la forme $u(x, t) = \sum X_n(x)p_n(t)$:

$$\begin{aligned} M \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \ddot{p}_n \right) + K \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n p_n \right) &= Q \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} M(X_n) \ddot{p}_n + \sum_{n=1}^{\infty} K(X_n) p_n &= Q \\ \Leftrightarrow \langle X_m, \sum_{n=1}^{\infty} M(X_n) \ddot{p}_n + \sum_{n=1}^{\infty} K(X_n) p_n \rangle &= \langle X_m, Q \rangle \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\langle X_m, M(X_n) \rangle \ddot{p}_n + \langle X_m, K(X_n) \rangle p_n) &= \langle X_m, Q \rangle \\ \Leftrightarrow \tilde{m}_m \ddot{p}_m + \tilde{k}_m p_m &= \langle X_m, Q \rangle \\ \Leftrightarrow \ddot{p}_m + \omega_m^2 p_m &= \frac{\langle X_m, Q \rangle}{\tilde{m}_m} \end{aligned}$$

On obtient donc un oscillateur harmonique forcé sans amortissement. La solution du régime forcé pour un forçage harmonique $Q(x, t) = q(x) \cos \Omega t$ s'écrit donc comme:

$$p_m(t) = \frac{\langle X_m, q \rangle / \tilde{m}_m}{\omega_m^2 - \Omega^2} \cos \Omega t.$$

On peut repasser dans la base "physique" et reconstituer la solution particulière:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle X_m, q \rangle / \tilde{m}_m}{\omega_m^2 - \Omega^2} X_m(x) \cos \Omega t.$$

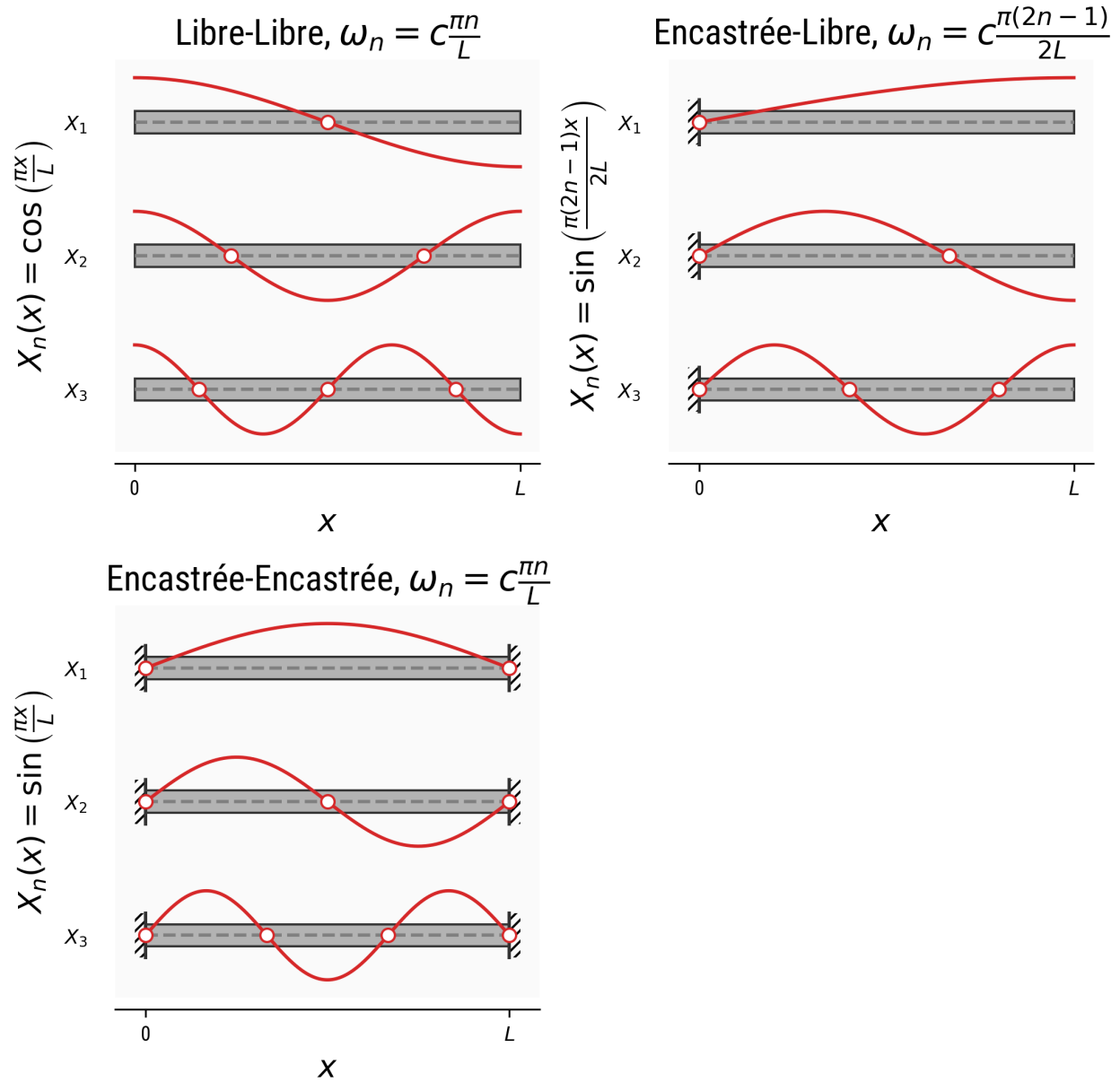
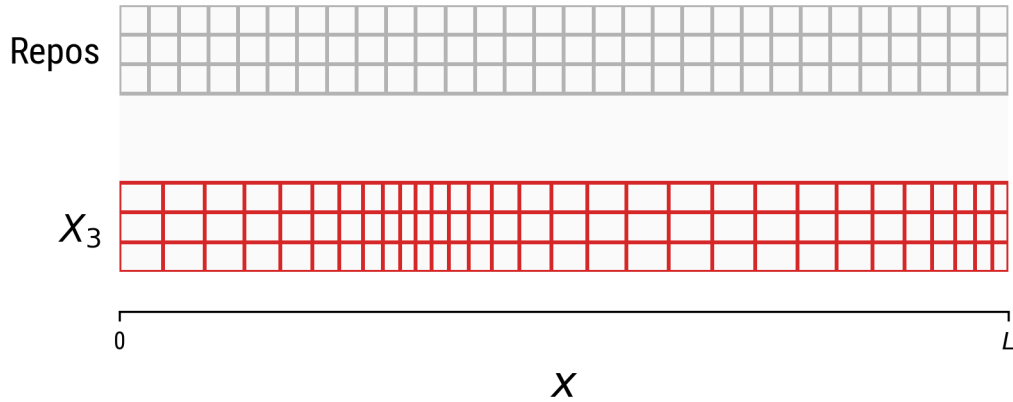


Figure 3.4: 3 premiers modes de vibrations longitudinaux pour les trois CL possibles.

3.3 Modes pour différentes conditions limites

⚠ Avertissement

Les modes de la Figure 3.4 sont dessinés d'une façon qui peut laisser penser que la barre vibre en flexion, ce n'est pas le cas ! Le déplacement des barres est uniquement longitudinal.



3.3.0.1 Remarques sur les modes longitudinaux

Sur toutes ces formes modales on peut identifier des points caractéristiques :

- Les **ventres de vibration** coïncident avec les maxima de vibration. On notera en particulier que les bords libres sont toujours le lieu d'un ventre de vibration
- Les **noeuds de vibration** sont des points de vibration nulle. On verra dans l'étude des mouvements forcés que des actions extérieures appliquées en ces points ne mobilisent pas le mode concerné et que de la même manière le mode concerné ne sera pas "vu" si un capteur y est posé.
- Les formes des modes sont fidèles aux **conditions aux limites cinématiques**

Cas particulier de la barre encastrée-libre soumise à une vibration harmonique du support.

C'est une situation commune de voir des structures soumises à la vibration de leur support. On s'attache dans ce paragraphe à modéliser la réponse d'une barre à cette excitation caractéristique.

On considère le support animé d'un déplacement longitudinal $u_s(t)$, pour le moment quelconque.

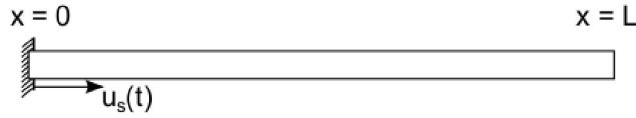


Figure 3.5: Barre encastée-libre soumise à une vibration longitudinale du support.

On peut écrire l'équation d'équilibre dans le repère galiléen en considérant que le déplacement total des sections de la barre est la somme du déplacement du support et du déplacement vibratoire : $u(x, t) + u_s(t)$. On considère qu'il n'y aucune action extérieure par ailleurs. L'équation du mouvement à considérer est donc l'équation du mouvement libre portant sur le déplacement total :

$$\frac{\partial^2(u + u_s)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2(u + u_s)}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\ddot{u}_s$$

Alternativement, on peut considérer la barre dans son repère propre, qui subit l'accélération $\ddot{u}_s(t)$. Du fait de cette accélération, toutes les sections de la barre subissent une force d'inertie opposée à l'accélération, en plus des efforts élastiques internes. L'équilibre dynamique d'une section s'écrit :

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho S \ddot{u}_s \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\ddot{u}_s$$

Pour obtenir la solution forcée, on utilise les modes propres de la poutre encastée libre :

$$u(x, t) = \sum_n \phi_n(t) X_n(x) \quad \text{et} \quad X_n(x) = \sin \frac{(2n+1)\pi}{2L} x$$

Pour identifier les $\phi_n(t)$, on résout pour tout $u_s(t)$:

$$\ddot{\phi}_n(t) + \omega_n^2 \phi_n(t) = \frac{-\ddot{u}_s(t) \rho S}{m_n} \int_0^L \sin(2n+1) \frac{\pi x}{2L} dx \Leftrightarrow \ddot{\phi}_n(t) + \omega_n^2 \phi_n(t) = \frac{-2L \ddot{u}_s(t) \rho S}{(2n+1)\pi m_n}$$

Cas particulier de la vibration harmonique du support

Si le mouvement du support est harmonique on a :

$$u_s(t) = U_0 \cos \Omega t \quad \text{et} \quad \ddot{u}_s(t) = -\Omega^2 U_0 \cos \Omega t$$

La réponse est harmonique de même fréquence

$$\phi_n(t) = \Phi_n(\Omega) \cos \Omega t \quad \text{et} \quad \ddot{\phi}_n(t) = -\Omega^2 \Phi_n(\Omega) \cos \Omega t$$

On en déduit l'amplitude de la contribution de chaque mode au mouvement vibratoire longitudinal de la barre :

$$(\omega_n^2 - \Omega^2) \Phi_n(\Omega) = \frac{2LU_0\Omega^2\rho S}{(2n+1)\pi m_n} \Leftrightarrow \Phi_n(\Omega) = \frac{2LU_0\rho S}{(2n+1)\pi m_n} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2}$$

avec

$$m_n = \rho S \int_0^L X_n^2(x) dx = \rho S \int_0^L \left(\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right)^2 dx = \frac{\rho S L}{2}$$

$$\phi_n(t) = \Phi_n(\Omega) \cos \Omega t = \frac{4U_0}{(2n+1)\pi} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$$

Le mouvement total de la poutre en vibration longitudinale est :

$$u(x, t) = \sum_n \phi_n(t) X_n(x) \Leftrightarrow$$

$$u(x, t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_n \frac{1}{2n+1} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \sin \left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right) \cos \Omega t$$

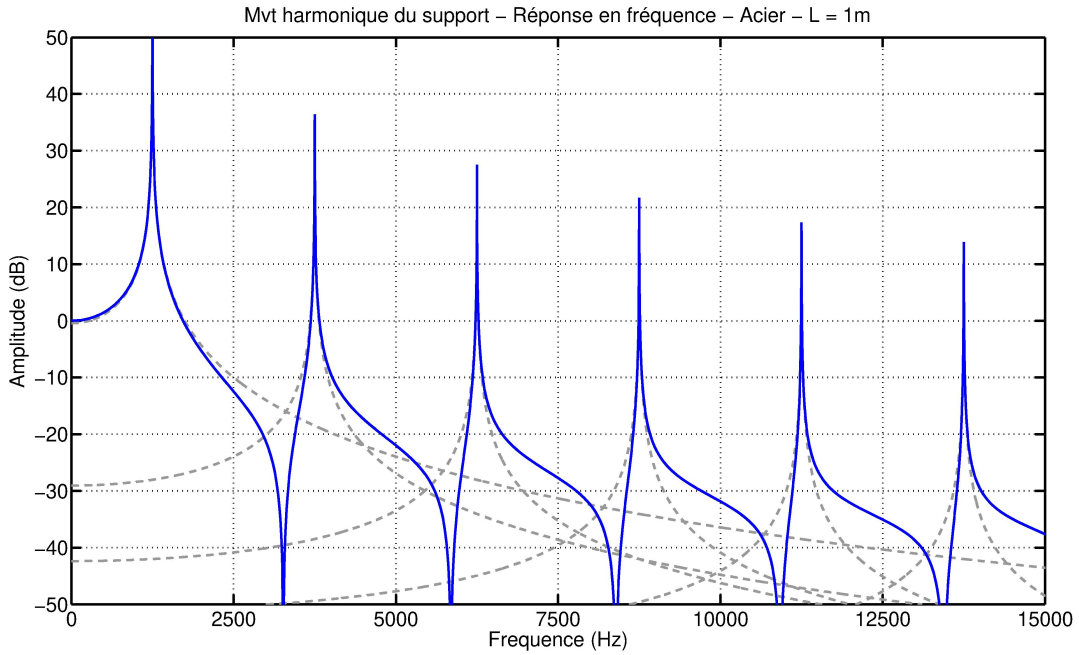


Figure 3.6: Amplitude de la réponse forcée d'une barre en acier en fonction de la fréquence de vibration de son support (en bleu)- Contribution de chaque mode (en pointillés gris)

4 Vibrations des poutres en flexion

Le second mode de vibration étudié dans ce cours est le mode de flexion ou mode de vibration transverse. On limite notre étude à la vibration des poutres droites élancées, qui subissent des efforts dynamiques transverses.

On notera les caractéristiques géométriques et constitutives suivantes : la section constante est notée S , les dimensions transverses sont petites devant la longueur L , le moment quadratique de la section suivant l'axe transverse est noté I , le matériau est isotrope et homogène de constantes élastiques (E, ν) et de masse volumique ρ .

Le poutre est soumise à une action extérieure $f(x, t)$ transverse et répartie sur sa longueur. Cette action extérieure dynamique engendre des petites perturbations de l'équilibre statique qui se traduisent par un déplacement transverse local (flèche locale) noté $v(x, t)$.

! Hypothèse d'Euler-Bernoulli

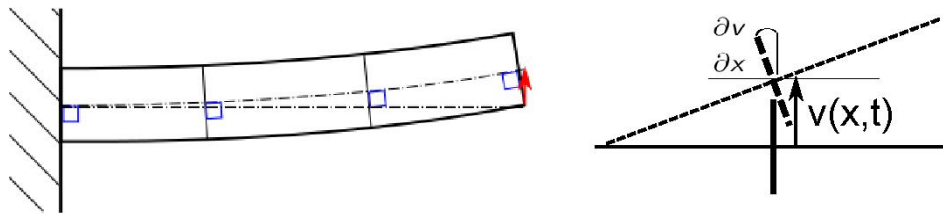


Figure 4.1: Hypothèse d'Euler-Bernoulli

En première approximation, on suppose que le déplacement transverse de la poutre est dominé par la flexion, et que la déformation due au cisaillement est négligeable. Cela implique que les sections perpendiculaire à la fibre neutre (l'axe de la poutre) restent perpendiculaire à celle-ci après la déformation de flexion, cf. Figure 4.1. Mathématiquement, la rotation des sections $\theta(x, t)$, supposée faible, est donnée par:

$$\theta(x, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, t).$$

4.1 Équation des vibrations transverses dans les poutres

Comme on a procédé dans le cas des vibrations longitudinales, on écrit l'équilibre dynamique d'un tronçon de poutre entre les points x_1 et x_2 , soumis à une force répartie transverse $f(x, t)$. Comme on isole un tronçon, l'effet du reste de la poutre sur la partie isolée est représenté par des efforts internes, montrés sur la Figure 4.2:

- l'effort de cisaillement $V(x_1)$ (et $V(x_2)$), aussi appelé **effort tranchant**
- un **moment de flexion** $M(x_1)$ (et $M(x_2)$).

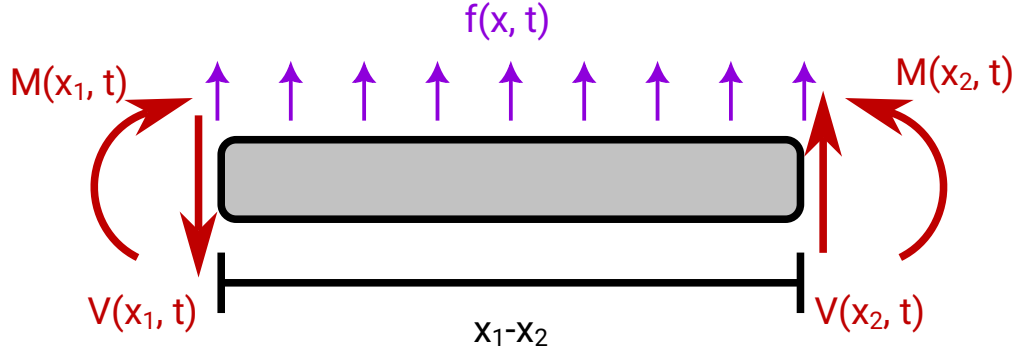


Figure 4.2: Efforts internes sur un tronçon de poutre

On applique le principe fondamental de la dynamique pour ce tronçon de poutre : comme on a une **translation** et une **rotation** possible, il faut établir la conservation de la quantité de mouvement du tronçon p et la conservation du moment cinétique L par rapport à x_1 . On a :

$$p(t) = \int_{x_1}^{x_2} dm \dot{v} = \int_{x_1}^{x_2} \rho S \dot{v} dx$$

$$L(t) = \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) dm \dot{v} = \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) \rho S \dot{v} dx$$

En posant la conservation de la quantité de mouvement, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \sum F_{\text{ext}} \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \rho S \ddot{v} dx &= -V(x_1) + V(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} f dx \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \rho S \ddot{v} dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial V}{\partial x} dx + \int_{x_1}^{x_2} f dx \quad (\text{thm. fondamental de l'analyse}) \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left(\rho S \ddot{v} - \frac{\partial V}{\partial x} - f \right) dx &= 0 \end{aligned}$$

Puisque le choix de x_1 et x_2 est arbitraire, on a nécessairement :

$$\rho S \ddot{v} = \frac{\partial V}{\partial x} + f \quad (4.1)$$

On applique le même principe au moment cinétique par rapport au point x_1 :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum M_{\text{ext}, x_1} \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) \rho S \ddot{v} \, dx &= -M(x_1) + M(x_2) + V(x_2)(x_2 - x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) f \, dx \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) (\rho S \ddot{v} - f) \, dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial M}{\partial x} \, dx + V(x_2)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Ici, on utilise Équation 4.1 pour remplacer le terme $\rho S \ddot{v} - f = \frac{\partial V}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) \frac{\partial V}{\partial x} \, dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial M}{\partial x} \, dx + V(x_2)(x_2 - x_1) \\ \Leftrightarrow [(x - x_1)V(x, t)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} V \, dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial M}{\partial x} \, dx + V(x_2)(x_2 - x_1) \quad (\text{IPP}) \\ (x_2 - x_1)V(x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + V \right) \, dx + (x_2 - x_1)V(x_2) \\ \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + V \right) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

Puisque le choix de x_1 et x_2 est arbitraire, on a nécessairement :

$$\frac{\partial M}{\partial x} + V = 0 \quad (4.2)$$

D'après la théorie des poutres la courbure de flexion est proportionnelle au moment de flexion et inversement proportionnel à la raideur à la flexion:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{M(x, t)}{EI} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \theta(x, t) \end{aligned}$$

En remplaçant M dans Équation 4.2, on a :

$$V = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right).$$

En remplaçant V dans Équation 4.1, on a :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = f.$$

On peut donc définir les applications linéaires $M(\dot{v})$ et $K(v)$:

$$\begin{aligned} M(\dot{v}) &= \rho S \dot{v}, \\ K(v) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

et l'on obtient l'équation du mouvement que l'on connaît :

$$M(\ddot{v}) + K(v) = f. \quad (4.3)$$

4.2 Modes de vibrations des poutres en flexion

On suppose que le produit EI est constant le long de la poutre. Il s'agit de résoudre l'équation du mouvement (4.3) en l'absence du terme de forçage ($f(x, t) = 0$), soit

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M(\ddot{v}) + K(v) = 0.$$

Comme pour les vibrations longitudinales, on cherche une solution de la forme :

$$v(x, t) = X(x)p(t) \quad (\text{onde stationnaire}).$$

En remplaçant dans Équation 4.3, on peut trouver des conditions identiques aux vibrations longitudinales (Équation 3.6), c'est-à-dire:

$$\begin{cases} \ddot{p} + \omega^2 p = 0 \\ K(X) = \omega^2 M(X) \end{cases}$$

La résolution de la deuxième équation donne la forme des modes. C'est également une équation différentielle ordinaire, mais contrairement aux vibrations longitudinales, elle est d'ordre 4.

$$EIX'''' - \omega^2 \rho S X = 0 \Leftrightarrow X'''' - \gamma^4 X = 0, \quad (4.4)$$

où l'on a introduit le nombre d'onde γ :

$$\begin{aligned} \gamma^4 &= \frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow \omega = c\gamma^2 && \text{(relation de dispersion)} \\ c &= \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{I}{S}} = c_L r_g. \end{aligned} \quad (4.5)$$

La constante c_L est la vitesse de propagation des ondes longitudinales et r_g est le [rayon de giration](#) selon l'axe de flexion, qui est une propriété géométrique de la section.

Avertissement

Contrairement aux ondes longitudinales, c n'est pas une vitesse !

Note

Contrairement aux ondes longitudinales, la relation de dispersion est non-linéaire, ce qui aura son importance quand on abordera la propagation d'ondes.

Pour en trouver la solution de l'Équation 4.4, on suppose qu'elle prend la forme générale $X(x) = X_0 e^{rt}$. L'introduction de cette forme dans l'équation précédente amène à l'équation caractéristique d'ordre 4:

$$r^4 - \gamma^4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = \pm \gamma^2$$

Des quatre racines possibles 2 sont réelles et engendreront des fonctions hyperboliques, les deux autres sont purement imaginaires et donneront des fonctions sinusoïdales : $r = -\gamma, +\gamma, -i\gamma, +i\gamma$

La solution générale à l'Équation 4.4 est l'ensemble des combinaisons linéaires des solutions possibles :

$$X(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x} + Ge^{i\gamma x} + He^{-i\gamma x}$$

qu'on peut écrire :

$$X(x) = C_1 \cos \gamma x + C_2 \sin \gamma x + C_3 \cosh \gamma x + C_4 \sinh \gamma x$$

ou encore :

$$\begin{aligned} X(x) &= D_1(\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) \\ &\quad + D_3(\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x) \end{aligned}$$

Cette forme générale, ne permet pas de savoir la déformée de la poutre. Il faut en effet déterminer les contributions respectives des différents termes de la combinaison linéaire.

4.3 Identification des modes propres transverses

Les déformations que la structure adopte naturellement pendant ses vibrations libres en flexion diffèrent selon les conditions de liaison à son support.

On commence par faire l'inventaire des modes possibles de liaison au support et de les traduire mathématiquement comme conditions imposées à $X(x)$. Dans les mouvements de flexion, il y a 3 types de liaison au bâti simplement modélisable avec chacun 2 paramètres connus :



Figure 4.3: Bord libre



Figure 4.4: Appui simple

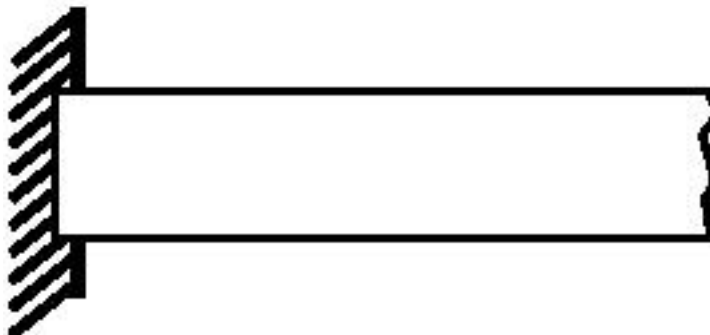


Figure 4.5: Encastrement

- le **bord libre** (Figure 4.3) ne subit aucun effort de flexion:

- L'effort tranchant est nul au bord :

$$T(\text{bord libre}, t) = 0 \Leftrightarrow EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, \forall t \Leftrightarrow$$

$$X'''(\text{bord libre}) = 0$$

- le moment de flexion est nul au bord

$$M(\text{bord libre}, t) = 0 \Leftrightarrow EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \forall t \Leftrightarrow$$

$$X''(\text{bord libre}) = 0$$

- les déplacements sont indéterminés

$$v = ? \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x} = ?$$

- A l'**appui simple** (Figure 4.4), un effort tranchant inconnu interdit le déplacement transverse au bord, mais aucun moment fléchissant n'interdit la rotation

- La flèche est nulle au bord

$$v(\text{appui simple}, t) = 0, \quad \forall t \Leftrightarrow$$

$$X(\text{appui simple}) = 0$$

- Le moment de flexion est nul au bord

$$M(\text{appui simple}, t) = 0 \Leftrightarrow EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\text{appui simple}, t) = 0, \quad \forall t \Leftrightarrow$$

$$X''(\text{appui simple}) = 0$$

- La rotation et l'effort tranchant sont indéterminés

- A l'**encastrement** (Figure 4.5), toute déformation est interdite

- la flèche est nulle au bord

$$v(\text{encastrement}, t) = 0, \quad \forall t \Leftrightarrow$$

$$X(\text{encastrement}) = 0$$

- la rotation est nulle au bord

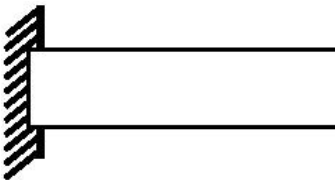
$$\theta(\text{encastrement}, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(\text{encastrement}, t) = 0, \quad \forall t \Leftrightarrow$$

$$X'(\text{encastrement}) = 0$$

- le torseur des efforts au bord est indéterminé

Le tableau (3) synthétise les conditions sur la déformation de la poutre en flexion pour les 3 types de liaison standard.

Table 4.1: Conditions aux limites pour les vibrations de poutres en flexion

Condition de liaison	Bord Libre	Appui simple	Encastrement
			
$v \rightarrow X$	?	0 0	
$\theta \rightarrow X'$	?	? 0	
$M \rightarrow X''$	0	0 ?	
$T \rightarrow X'''$	0	? ?	

La figure 22 présente les différentes combinaisons de liaisons qui peuvent être traités simplement pour une poutre en vibration transverse.

Combinaisons possibles des conditions aux limites pour les vibrations transverses

Les paragraphes suivants développent le calcul des modes propres pour quelques-uns de ces cas.

4.3.1 Modes propres de la poutre simplement appuyée aux deux extrémités.

Dans ce cas le déplacement et le moment fléchissant sont nuls en $x = 0$ et $x = L$, c'est à dire :

$$X(0) = X''(0) = X(L) = X''(L) = 0$$

On choisit l'expression ([eqn:FormeXT3]) comme forme générale de la déformée de la poutre :

$$X(x) = D_1(\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) \\ + D_3(\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x)$$

La dérivée seconde s'écrit :

$$X''(x) = \gamma^2(D_1(-\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2(-\cos \gamma x - \cosh \gamma x) \\ + D_3(-\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_4(-\sin \gamma x - \sinh \gamma x))$$

On a donc $X(0) = 0 \Rightarrow D_1 = 0$ et $X''(0) = 0 \Rightarrow D_2 = 0$

De plus $X(L) = 0$ et $X''(L) = 0$ soit $D_3 = D_4$

et

$$\sin \gamma L = 0$$

Les valeurs possibles de γ sont données par: $\gamma_n = \frac{n\pi}{L}$

Les modes propres ont donc pour expression

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

et les fréquences propres associées: $\omega_n = \gamma_n^2 c$

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

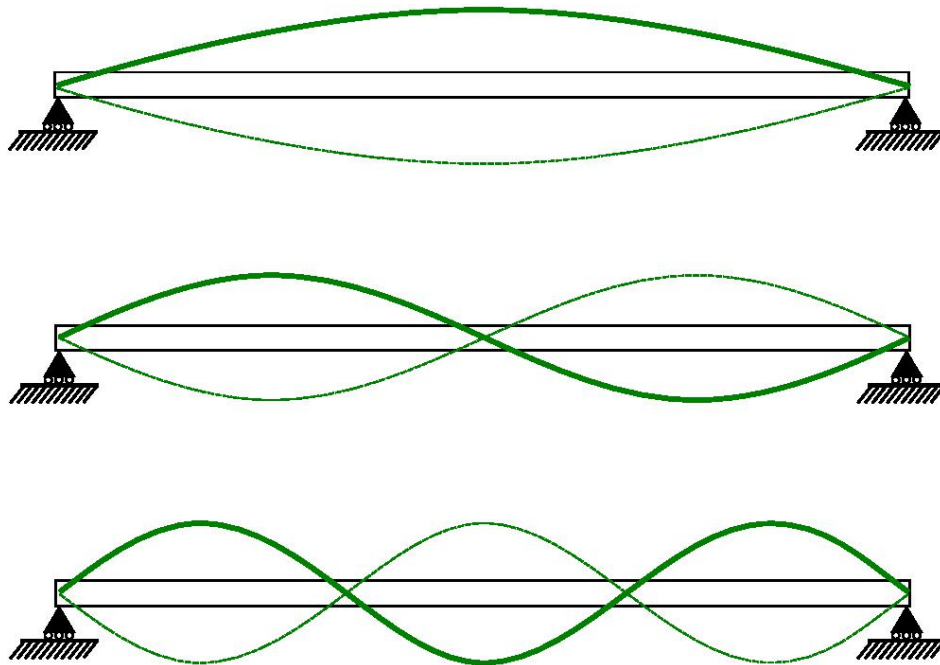


Figure 4.6: Trois premiers modes de flexion de la poutre appuyée aux deux bords

4.3.2 Modes propres de la poutre libre aux deux extrémités.

Ce cas correspond à la situation où les appuis sont soit inexistants, soit de raideur assez faible devant celle de la poutre pour être négligés.

On écrit ici que l'effort tranchant et le moment fléchissant sont nuls aux deux bords :

En $x = 0$:

$$X''(0) = 0 \Rightarrow D_2 = 0 \quad \text{et} \quad X'''(0) = 0 \Rightarrow D_4 = 0$$

On a donc

$$X(x) = D_1(\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_3(\sin \gamma x + \sinh \gamma x) \quad (4.6)$$

Par ailleurs en $X''(L) = 0$ et $X'''(L) = 0$ donnent le système suivant :

$$(S) \begin{cases} D_1(-\cos \gamma L + \cosh \gamma L) + D_3(-\sin \gamma L + \sinh \gamma L) = 0 \\ D_1(\sin \gamma L + \sinh \gamma L) + D_3(-\cos \gamma L + \cosh \gamma L) = 0 \end{cases}$$

Pour avoir des solutions D_1 et D_3 non trivialement nulles, le déterminant de (S) doit être nul.

L'équation obtenue donne une condition nécessaire sur γ pour avoir l'existence de solutions non-nulles:

$$\cos \gamma L \cosh \gamma L = 1$$

On peut visualiser graphiquement cette équation:

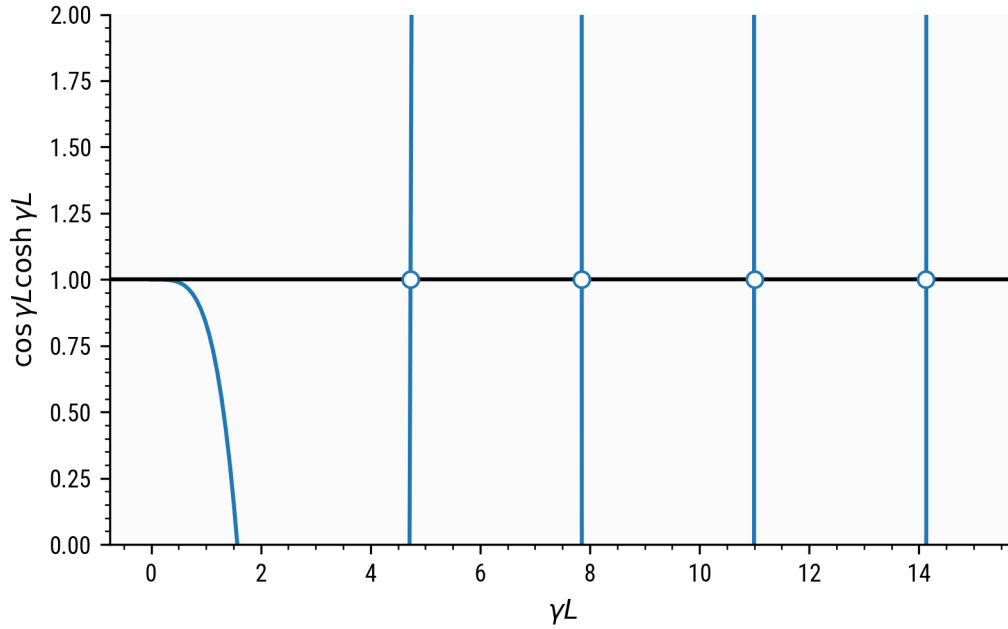


Figure 4.7: Équation non-linéaire pour le nombre d'onde

Les racines de cette équation sont données dans le tableau (4) sont trouvées numériquement:

Table 4.2: Cinq premières racines de l'équation du nombre d'onde pour la poutre libre-libre

Solutions de $\cos \gamma L \cosh \gamma L = 1$					
$\gamma_1 L$	$\gamma_2 L$	$\gamma_3 L$	$\gamma_4 L$	$\gamma_5 L$	...

Solutions de $\cos \gamma L \cosh \gamma L = 1$					
4.73	7.85	11	14.13	17.28	...

Les fréquences propres sont obtenues en calculant : $\omega_n = c\gamma_n^2$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\gamma_n L}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

La forme des modes propres est obtenue en substituant les racines $\gamma_n L$ successivement dans le système (S), ce qui donne les rapports $\left(\frac{D_1}{D_3} \right)_n$ qui expriment la contribution relative des deux termes de l'expression (4.6).

Pour le 1er mode, par exemple, on injecte la première racine dans (S) et on obtient :

$$\left(\frac{D_3}{D_1} \right)_1 \approx 0.98$$

L'expression analytique de la déformée modale est donc :

$$X(x) = (\cos \gamma_1 x + \cosh \gamma_1 x) + 0.98(\sin \gamma_1 x + \sinh \gamma_1 x)$$

Les déformées modales obtenues de cette manière pour les 3 premières racines de l'équation de dispersion sont représentés Figure 4.8.

4.3.3 Modes propres de la poutre bi-encastree

On écrit ici que la flèche et la rotation sont nulles aux deux extrémités. Ce qui abouti à :

$$X(x) = D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x)$$

On obtient aussi la même équation de dispersion que dans le cas libre-libre. On a donc les mêmes racines $\gamma_n L$ et les mêmes fréquences propres. Mais les modes ont des formes différentes qui sont représentées sur la Figure 4.9.

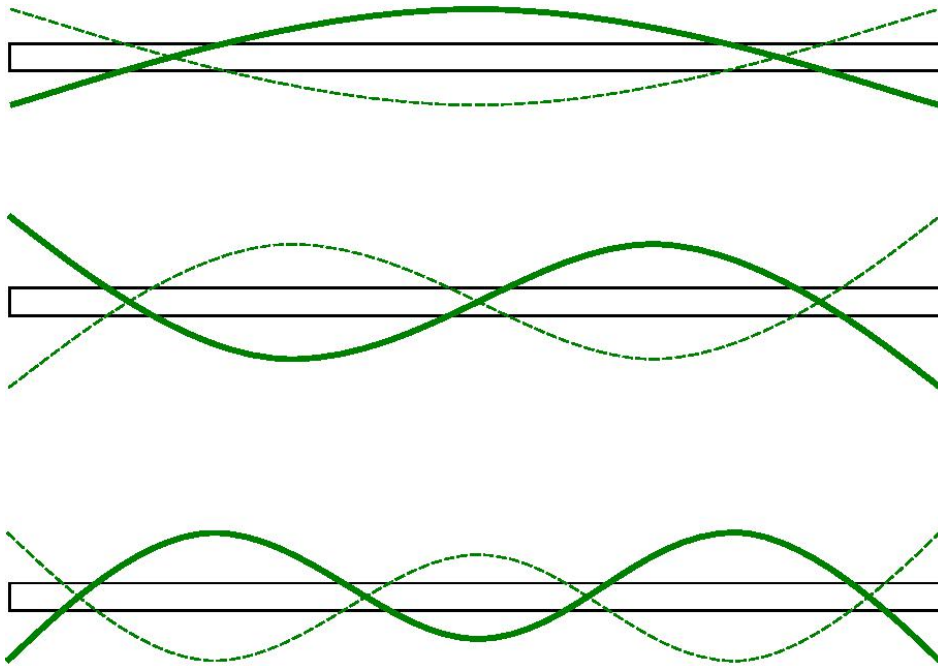


Figure 4.8: Trois premiers modes de flexion de la poutre libre-libre

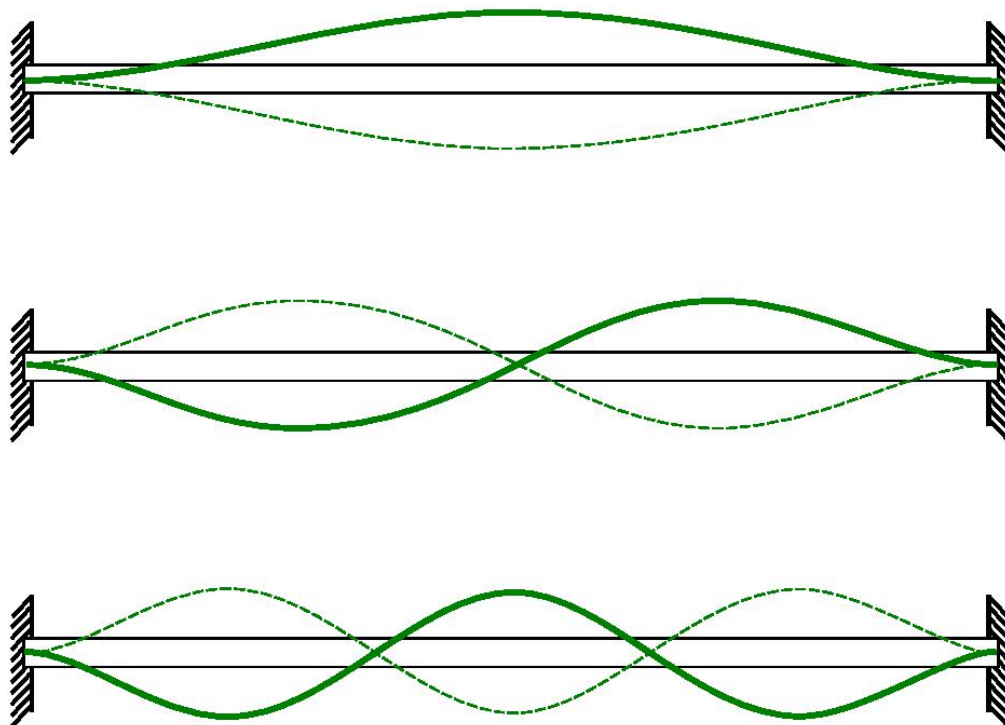


Figure 4.9: Trois premiers modes transverses de la poutre bi-encastée

4.3.4 Modes propres de la poutre encastrée-libre

Le cas de la poutre encastrée-libre donne lieu à une solution de la forme :

$$X(x) = D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x)$$

et à l'équation suivante pour le nombre d'onde :

$$\cos \gamma L \cosh \gamma L = -1$$

A partir des racines de cette équation données dans le tableau(5), on identifie les modes propres de la Figure 4.10. Les fréquences propres associées sont données par l'Équation 4.5.

Table 4.3: Cinq premières racines de l'équation de dispersion pour la poutre encastrée-libre

Solutions de $\cos \gamma L \cosh \gamma L = -1$						
$\gamma_1 L$	$\gamma_2 L$	$\gamma_3 L$	$\gamma_4 L$	$\gamma_5 L$	...	
1.88	4.69	7.86	11	14.14	...	

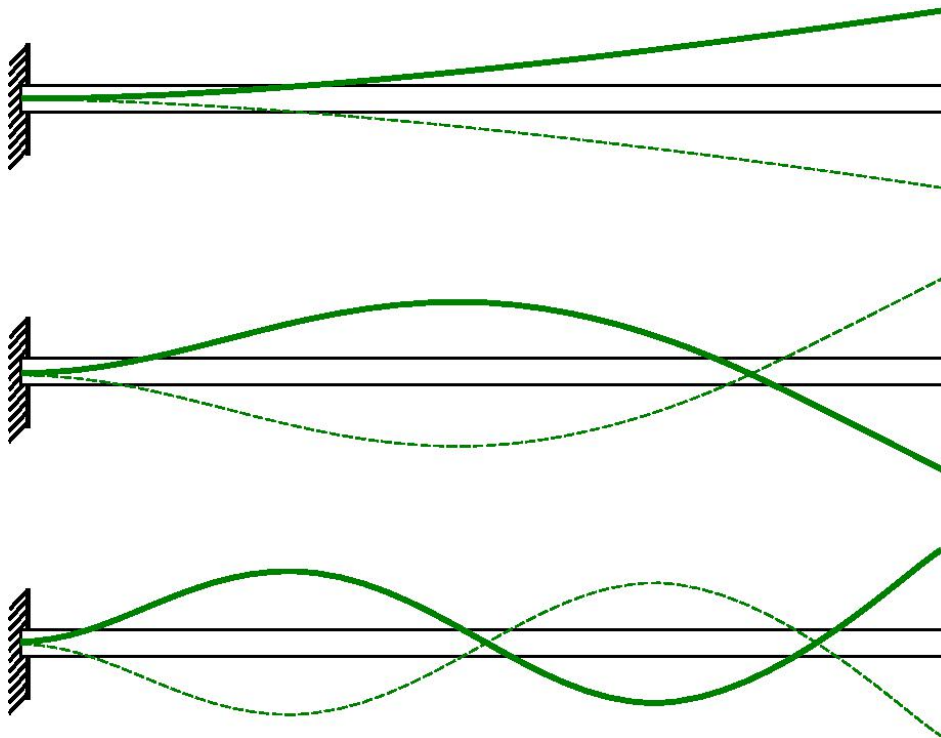


Figure 4.10: Modes propres transverses de la poutre encastrée-libre

4.3.5 Modes propres de la poutre encastrée - appuyée

Le cas de la poutre encastrée- appuyée donne lieu à une solution de la forme :

$$X(x) = D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x)$$

On obtient aussi l'équation suivante pour le nombre d'onde :

$$\tan \gamma L = \tanh \gamma L$$

Table 4.4: Cinq premières racines de l'équation de dispersion pour la poutre encastrée-appuyée

Solutions de $\tan \gamma L = \tanh \gamma L$						
$\gamma_1 L$	$\gamma_2 L$	$\gamma_3 L$	$\gamma_4 L$	$\gamma_5 L$	...	
3.93	7.07	10.21	13.35	16.49	...	

A partir des racines de cette équations données dans le tableau ci-dessus, on identifie les modes propres de la Figure 4.11. Les fréquences propres associées sont données par l'Équation 4.5.

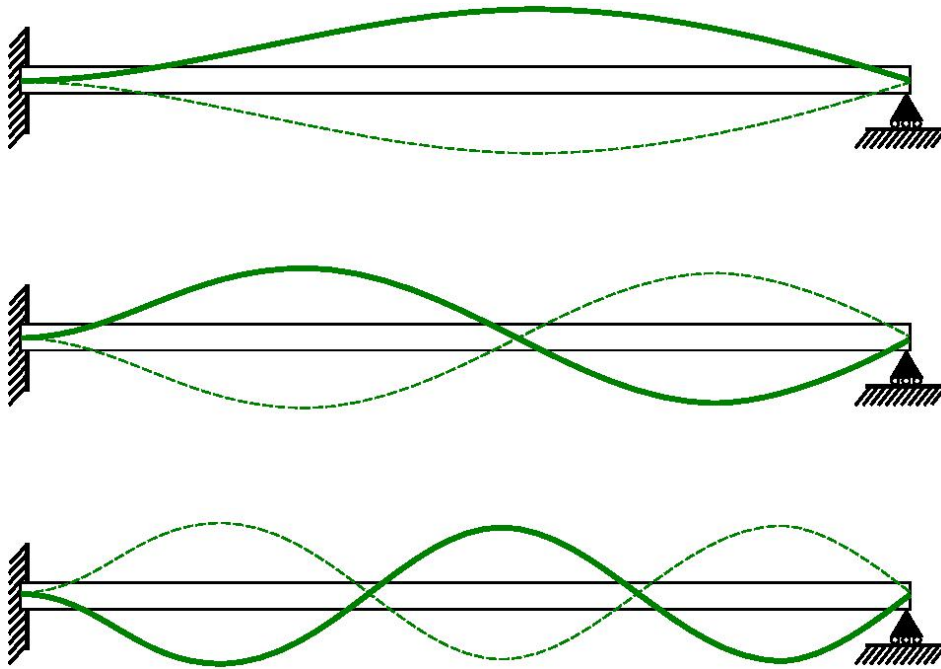


Figure 4.11: Modes propres transverses de la poutre encastrée-libre

4.4 Énergies cinétique et potentielle

Comme pour le cas longitudinal, les énergies s'écrivent sous la forme:

$$T(\dot{v}) = \frac{1}{2} \langle \dot{v}, M(\dot{v}) \rangle = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S(\dot{v})^2 dx$$
$$U(v) = \frac{1}{2} \langle v, K(v) \rangle = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \cdot v dx$$

On peut écrire une forme alternative de l'énergie potentielle en intégrant par partie:

$$\begin{aligned} 2U(v) &= \langle v, K(v) \rangle = \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \cdot v dx \\ &= \left[v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ &= [v \cdot V]_0^L - \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right]_0^L + \int_0^L EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \\ &= [v \cdot V]_0^L - [\theta \cdot M]_0^L + \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Les termes aux bords $[v \cdot V]_0^L$ et $[\theta \cdot M]_0^L$ sont nuls puisque:

- soit $v = 0$ (appui simple ou encastrement), soit $V = 0$ (bord libre)
- soit $\theta = 0$ (encastrement), soit $M = 0$ (appui simple ou bord libre)

Donc :

$$U(v) = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

4.5 Comparaison des fréquences propres des modes longitudinaux et transverses

La Figure 4.12 présente les fréquences des premiers modes propres des vibrations longitudinales et transverses d'une poutre en acier de longueur $L = 1m$ pour les différentes conditions de liaison.

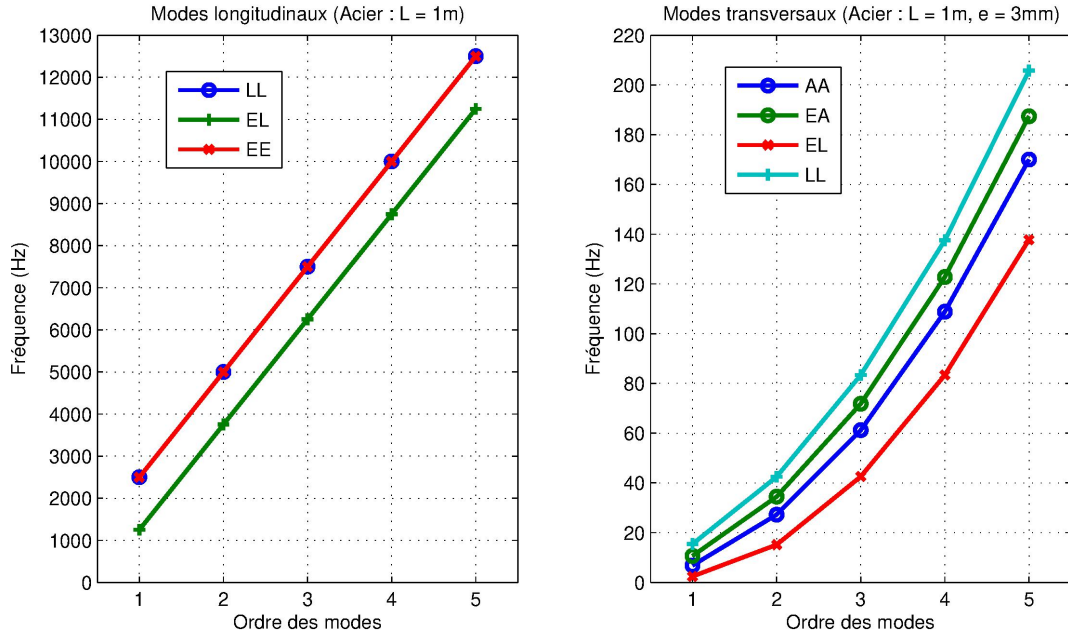


Figure 4.12: Fréquence de modes propres longitudinaux et transverses d'une poutre en acier ($L = 1m, e = 3mm$)

On constate que les vibrations de traction compression se manifestent à des fréquences 2 ordres de grandeur plus haut que les vibrations de flexion.

Ces dernières varient de la dizaine de Hertz à quelques centaines de Hertz, dans une gamme de fréquences où il sera possible de les observer visuellement ou encore au toucher.

Les vibrations longitudinale évoluent dans une gamme de l'ordre de plusieurs milliers de Hertz et peuvent dans certaines conditions être entendues.

4.6 Orthogonalité, conditions initiales et régime forcé

Les propriétés des modes vues Section 3.2.5 sont rigoureusement **identique** pour la vibration transverse des poutres. Le calcul des conditions initiales et de la réponse en régime forcé est également inchangé identique. On donne ci-dessous un exemple de calcul en régime forcé avec une force ponctuelle.

4.6.0.1 Réponse à une force harmonique ponctuelle appliquée en x_0

Dans ce cas particulier, illustré figure (28), la force s'écrit:

$$f(x, t) = F_0 \delta(x - x_0) \cos \Omega t$$

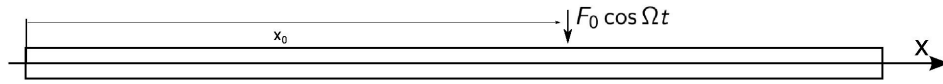


Figure 4.13: Poutre soumise à une force transverse harmonique ponctuelle appliquée en x_0

La contribution de la force à l'excitation de chaque mode s'écrit :

$$\int_0^L X_n(x) F_0 \delta(x - x_0) dx = F_0 X_n(x)(x_0)$$

C'est la force F_0 multipliée par l'amplitude du mode au point X_0 .

Autrement dit, si la force est appliquée à un noeud du mode, celui-ci ne sera pas excité. Si au contraire elle est appliquée à un ventre le mode sera pleinement mobilisé.

Finalement :

$$v(x, t) = \sum_n X_n(x) \phi_n(t) = F_0 \sum_n \frac{X_n(x)(x_0) X_n(x)}{m_n(\omega_n^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t$$

A titre d'exemple, on traite le **cas de la poutre appuyée à ses deux bouts**.

On rappelle les paramètres modaux de cette configuration :

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad m_n = \rho S \int_0^L \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \right)^2 dx = \frac{\rho S L}{2} \quad \omega_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

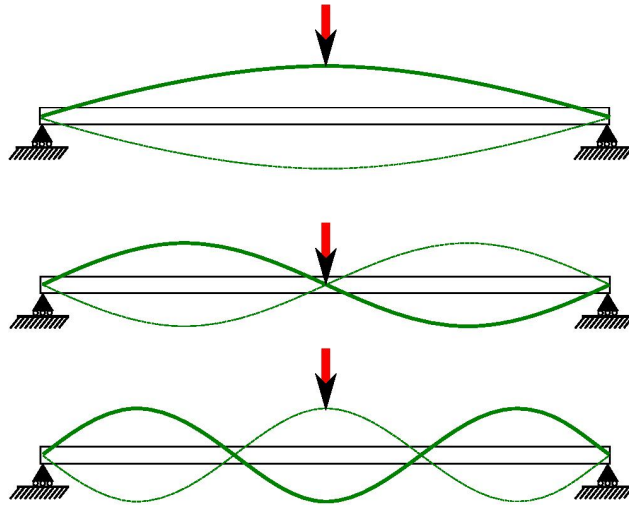


Figure 4.14: Excitation ponctuelle transverse de la poutre simplement appuyée

La réponse forcée de la poutre s'écrit:

$$v(x, t) = \frac{2F_0}{\rho S L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}}{\omega_n^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$$

Si F_0 est appliquée au centre de la poutre $x_0 = L/2$, la déformation de la poutre au cours du temps s'écrit

$$v(x, t) = \frac{2F_0}{\rho SL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{L}}{\omega_n^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$$

soit :

$$v(x, t) = \frac{2F_0}{\rho SL} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \sin \frac{(2p+1)\pi x}{L}}{\omega_{2p+1}^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$$

ou encore :

$$v(x, t) = \frac{2F_0}{\rho SL} \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{L}}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{L}}{\omega_3^2 - \Omega^2} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{L}}{\omega_5^2 - \Omega^2} - \frac{\sin \frac{7\pi x}{L}}{\omega_7^2 - \Omega^2} \dots \right) \cos \Omega t$$

On peut remarquer que, la force étant appliquée à un noeud de tous les modes pairs leur contribution est nulle.

Les amplitudes de la réponse dans les cas d'application de la force à un point choisi arbitrairement et au point central sont données en fonction de la fréquence figure (29). On y observe la disparition des résonances des modes pairs lorsque la force est appliquée au centre.

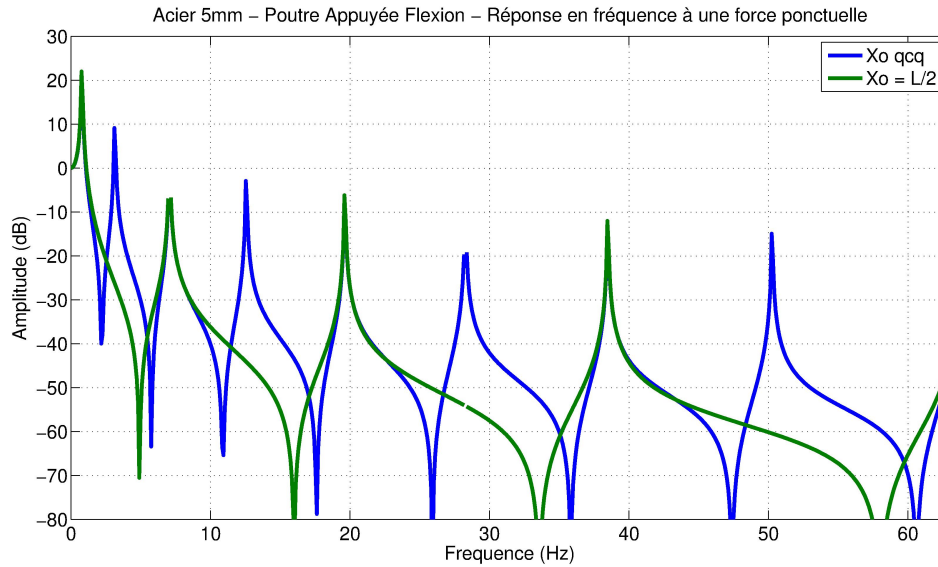


Figure 4.15: Réponse en fréquence de la poutre simplement appuyée à une force ponctuelle

4.7 Approximation des vibrations des structures complexes

Pour des systèmes continus de constitution géométrique ou structurelle plus complexe que celles étudiées précédemment, c'est à dire qui ne vérifient pas les hypothèses de matériau homogène et isotrope ou de section constante, les résultats précédents ne s'appliquent plus. Il peut cependant

être souhaitable d'en estimer les fréquences de résonance et les modes de déformation sans recourir à des outils numériques complexes. Pour cela, moyennant des hypothèses raisonnables sur la déformation de la structure, on peut mettre en œuvre deux méthodes. La méthode de Rayleigh, en imposant à la structure une déformée vibratoire cinématiquement admissible, permet d'obtenir une valeur approchée de la fréquence à laquelle elle est susceptible de se manifester. La méthode de Rayleigh-Ritz, un peu plus complexe, considérant un ensemble réduit de déformées possibles comme des degrés de liberté vibratoire, fait appel aux outils servant pour l'étude des systèmes discrets et permet d'obtenir les formes et les fréquences approchées des premiers modes propres de la structure. Les deux méthodes nécessitent d'écrire les énergies cinétique et potentielle associées aux déformations possibles ou supposées qu'on rappelle ici dans le cas général :

Pour une structure Ω dont la déformée vibratoire est décrite par la fonction $f(x, t)$, l'énergie cinétique s'écrit à chaque instant :

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(x) \left(\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} \right)^2 dx$$

Pour l'énergie potentielle de déformation, on a :

$$U(t) = \int_{\Omega} e_d(x, t) dx$$

où e_d est l'énergie locale de déformation qui dépend de la loi de comportement à considérer

4.7.1 Méthode de Rayleigh

Dans le cas d'un système conservatif, cette méthode considère le théorème de conservation de l'énergie qui établit que les maxima d'énergie potentielle et cinétique sont égaux :

$$E = U + T = U_{max} = T_{max} \Leftrightarrow \frac{U_{max}}{T_{max}} = 1$$

Lorsque le mouvement du système est décrit par une fonction $f(x, t) = \phi(t)X_n(x)$, on peut écrire ces énergies sous les formes suivantes :

$$T = \frac{1}{2} m_n \dot{\phi}^2(t) \quad \text{et} \quad U = \frac{1}{2} k_n \phi^2(t)$$

où m_n et k_n sont respectivement les masse et raideur dynamiques du système en vibration suivant le mode $X_n(x)$.

Dans le cas particulier d'un mode propre, le mouvement naturel est harmonique à la fréquence ω et on a :

$$\phi(t) = A \cos(\omega t) \quad \dot{\phi}(t) = -A\omega \sin(\omega t)$$

On a donc :

$$T = \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 \sin^2 \omega t \quad \text{et} \quad U = \frac{1}{2} k_n \cos^2 \omega t$$

d'où

$$T_{max} = \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 \quad \text{et} \quad U_{max} = \frac{1}{2} k_n$$

Avec $T_{max} = U_{max}$, on peut finalement écrire :

$$\omega_n^2 = \frac{k_n}{m_n}$$

4.7.1.1 Application à la poutre encastrée libre en flexion

Dans cet exemple, déjà résolu par la méthode exacte, on considère une poutre de longueur L encastrée en $x = 0$ et libre en $x = L$. La vibration est stationnaire, si bien qu'on peut écrire $f(x, t) = \phi(t)X(x)$. Par ailleurs, on suppose *a priori* que la poutre se déforme selon la courbe pointillée de la figure 30. Cette déformée doit respecter les conditions cinématiquement admissibles : un déplacement et une flèche nuls à l'encastrement et un déplacement maximum au bord libre.

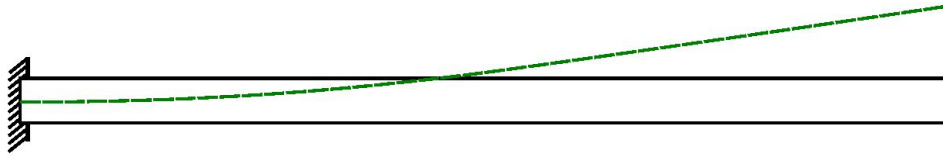


Figure 4.16: Poutre encastrée libre dans son 1er mode de flexion

Il faut associer à cette forme un modèle mathématique et parmi ceux possibles, on choisit, le modèle polynomial correspondant à la déformée statique de la poutre soumise à une force transverse à son extrémité, soit :

$$X(x) = 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3$$

On vérifie à chaque instant $X(0) = 0$ et $\partial_x X(0) = 0$ et $X(L) = \max(X(x))$.

A l'aide de ce modèle, on peut estimer les énergies cinétique et potentielle de la structure pour cette vibration particulière :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) \int_0^L \rho S X(x)^2 dx = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) \int_0^L \rho S \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]^2 dx = \frac{1}{2} 0.942 \rho S L \dot{\phi}^2(t)$$

$$U = \frac{1}{2} \phi^2(t) \int_0^L EI X''(x)^2 dx = \frac{1}{2} \phi^2(t) \int_0^L EI \left[\frac{6}{L^2} - \frac{6x}{L^3} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \frac{12EI}{L^3} \phi^2(t)$$

On obtient ainsi une valeur approchée de la pulsation du mode décrit par la fonction $X(x)$

$$\omega_{approx} = \sqrt{\frac{12}{0.942 L^4} \frac{EI}{\rho S}} = \frac{3.567}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

On rappelle la valeur exacte de la fréquence fondamentale de la poutre encastree libre :

$$\omega_{exacte} = \frac{(\gamma_1 L)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \frac{3.534}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

l'erreur relative pour cette estimation est $\frac{\Delta\omega}{\omega} < 2\%$.

4.7.2 Méthode de Rayleigh-Ritz

Cette méthode dérivée de la précédente est employée pour réduire le nombre de degrés de liberté d'un système complexe (à N ddl, N pouvant être infini) et pour en estimer le premiers modes et leur fréquence. Comme précédemment, on commence faire des hypothèses acceptables sur la déformation du système. Ritz a suggéré que la déformation soit approchée par une combinaison linéaire de fonctions de base, combinaison devant satisfaire aux conditions aux limites cinématiques du système. Soient $X_i(x)$, $i = 1 \dots n \ll N$ ces fonctions de base et ϕ_i leurs contributions respectives au mouvement. On pose que la déformée du système s'écrit sous forme explicite ou en notation matricielle :

$$f(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(t) X_i(x) = \mathbf{X}^t \boldsymbol{\phi}$$

On peut alors exprimer les énergies cinétique et potentielle sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} \quad \text{et} \quad U = \frac{1}{2} \mathbf{X}^t \mathbf{K} \mathbf{X}$$

et identifier une matrice de masse $\mathbf{M}$ et une matrice de raideur $\mathbf{K}$. Finalement, on tire de ces matrices des valeurs approchées de fréquences propres et une forme approchée des modes propres correspondants par les méthodes mises en œuvre pour un système discret.

4.7.2.1 Application aux vibrations longitudinales d'une poutre E-L

On considère la même poutre encastree-libre que précédemment, mais on cherche cette fois-ci à obtenir une valeur approchée de ses 4 premières fréquences propres ainsi qu'une forme approximative du mode de vibration associé. On fait l'hypothèse que les déformées modales jusqu'au quatrième mode peuvent être réduites en une combinaison de 4 fonctions polynomiales respectant les conditions aux limites cinématiques :

$$u(x, t) = \frac{x}{L} \phi_1(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \phi_2(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \phi_3(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^4 \phi_4(t)$$

Les fonctions de base choisies sont présentées figure 31. On peut remarquer qu'elles ne sont pas orthogonales.

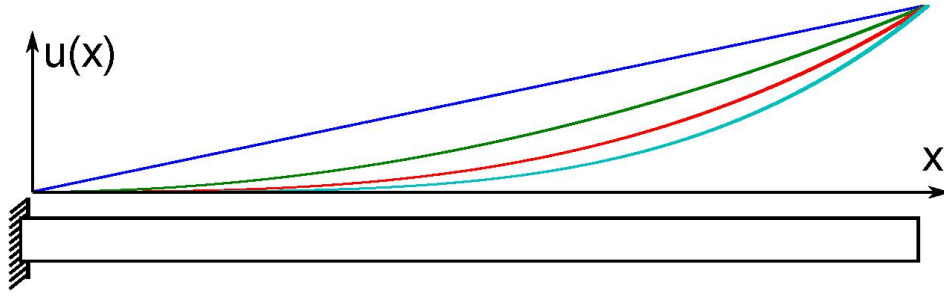


Figure 4.17: Base de 4 fonctions polynomiales pour l'approximation des vibrations longitudinales de la poutre encastree libre

Partant de l'expression [\[eqn:RayRitz_approx\]](#), on calcule les énergies cinétique et potentielle afin d'identifier des matrice **M** et **K**

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \left(\dot{\phi}_1(t) \frac{x}{L} + \dot{\phi}_2(t) \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \dot{\phi}_3(t) \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \dot{\phi}_4(t) \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \rho S L \left(\frac{1}{3} \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_1 + \frac{2}{4} \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + \frac{2}{5} \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_3 + \frac{2}{6} \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_4 + \frac{1}{5} \dot{\phi}_2 \dot{\phi}_2 + \frac{2}{6} \dot{\phi}_2 \dot{\phi}_3 + \frac{2}{7} \dot{\phi}_2 \dot{\phi}_4 + \frac{1}{7} \dot{\phi}_3 \dot{\phi}_3 + \frac{2}{8} \dot{\phi}_3 \dot{\phi}_4 + \frac{1}{9} \dot{\phi}_4 \dot{\phi}_4 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^L ES \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} ES \int_0^L \left(\phi_1(t) \frac{1}{L} + \phi_2(t) \frac{2x}{L^2} + \phi_3(t) \frac{3x^2}{L^3} + \phi_4(t) \frac{4x^3}{L^4} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{ES}{L} \left(\phi_1 \phi_1 + \phi_1 \phi_2 + \phi_1 \phi_3 + \phi_1 \phi_4 + \frac{4}{3} \phi_2 \phi_2 + \frac{6}{2} \phi_2 \phi_3 + \frac{16}{5} \phi_2 \phi_4 + \frac{9}{5} \phi_3 \phi_3 + 4 \phi_3 \phi_4 + \frac{16}{7} \phi_4 \phi_4 \right)
 \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{M} = \rho S L \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4/3 & 3/2 & 8/5 \\ 1 & 3/2 & 9/5 & 2 \\ 1 & 8/5 & 2 & 16/7 \end{pmatrix}$$

La diagonalisation de ces matrices procure les fréquences et vecteurs propres approchés. Les deux premiers couples approchés sont à comparer à ceux obtenus par la méthode exacte :

Mode 1

$$\omega_{1_{Ritz}} = \frac{1.571}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad X_{1_{Ritz}} = \frac{x}{L} + 0.028 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 0.5 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 0.11 \left(\frac{x}{L} \right)^4$$

à comparer à la **solution exacte**:

$$\omega_{1_{vrai}} = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{1.571}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \left(\frac{\Delta\omega_1}{\omega_1} = 0 \right) \quad X_{1_{vrai}} = \sin \frac{\pi x}{2L}$$

et **Mode 2**

$$\omega_{2_{Ritz}} = \frac{4.724}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad X_{2_{Ritz}} = \frac{x}{L} + 0.69 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2.56 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 2.06 \left(\frac{x}{L} \right)^4$$

à comparer à la **solution exacte** :

$$\omega_{2_{vrai}} = \frac{3\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{4.712}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \left(\frac{\Delta\omega_2}{\omega_2} = 0.25\% \right) \quad X_{2_{vrai}} = \sin \frac{3\pi x}{2L}$$

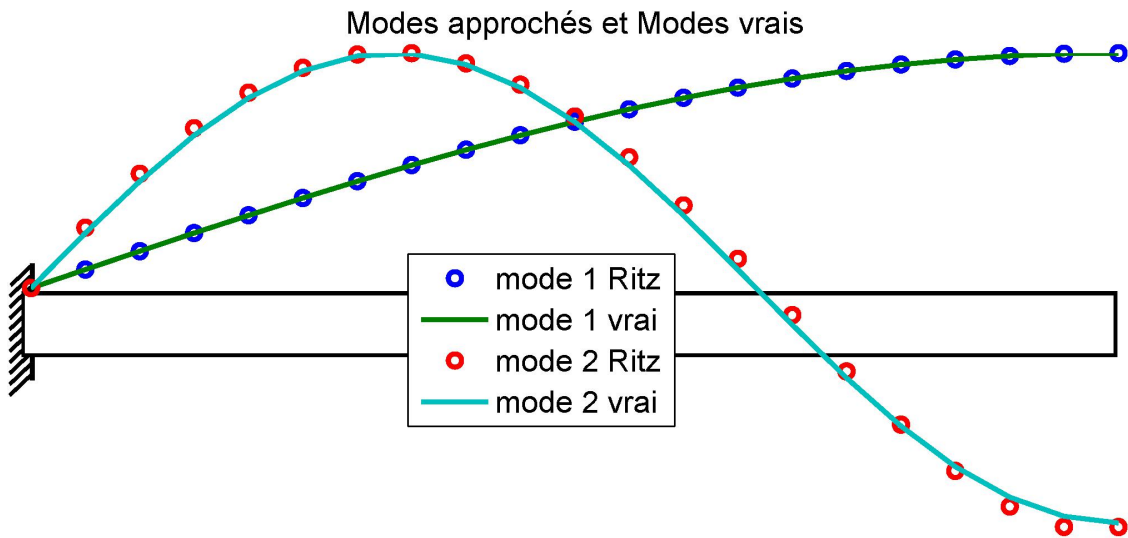


Figure 4.18: Forme approchée par la méthode de Ritz des 2 premiers modes de vibration longitudinales de la poutre encastée libre comparée à la forme exacte

Annexes

Equation des vibrations transverses des cordes

movie

ViolinStringSlowMotion.mp4

Film ralenti des vibrations d'une corde de violon

Le film en figure 33 montre la vibration d'une corde de violon excitée par l'archet. Pour écrire l'équation différentielle du mouvement transverse $v(x, t)$ régissant cette vibration, on considère la corde de longueur L dans un matériau de masse linéique ρ (kg/m) et de tension T (N) et on isole une portion de la corde de longueur dx afin de faire le bilan des efforts dynamiques qu'elle subit, comme décrit par la figure 34. La pente locale de la corde est notée $\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$

Bilan local des efforts dans une corde rendue

Le bilan des forces exercées sur la portion de corde se décompose dans les directions longitudinale x et transverse y .

Suivant x , on peut considérer que le déplacement de la portion est nul

$$|T(x + dx)| \cos \alpha(x + dx) - |T(x)| \cos \alpha(x) = 0$$

Pour de petits déplacements transverses, on a, au 1er ordre : $\cos \alpha \approx 1$, soit

$$T(x + dx) = T(x)$$

C'est à dire que la tension de la corde est constante sur toute sa longueur.

Suivant y , on prend en compte l'inertie de la portion et la composante transverse de la tension aux 2 extrémités :

$$T \sin \alpha(x + dx) - T \sin \alpha(x) = \rho dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Soit au 1er ordre :

$$T \alpha(x + dx) - T \alpha(x) = \rho dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow T \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx = \rho dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

En substituant à la pente α son expression en fonction de v et en considérant un développement de Taylor d'ordre 1 ($\alpha(x + dx) = \alpha(x) + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$), on parvient à :

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

On établit simplement que c a la dimension d'une vitesse :

$$[c] = \sqrt{\frac{N}{kg/m}} = \sqrt{\frac{kg/m/s^2}{kg/m}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}$$

c est la vitesse de propagation des ondes transverses dans la corde de masse linéique ρ et de tension T .

Pour une corde en acier de diamètre 0.5 mm tendue à 10 kg : $c_{acier} \approx 400 m/s$

Vibrations de torsion dans les arbres

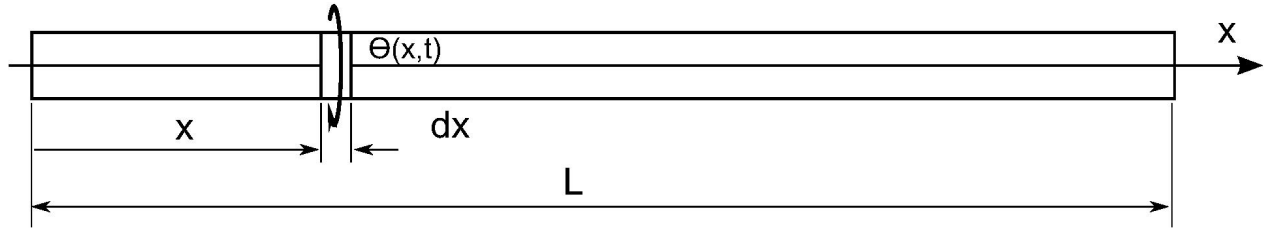


Figure 4.19: Paramètres des ondes de torsion dans une barre

On considère à nouveau une barre droite de longueur $L (\gg e, l)$ où e et l sont les dimensions transverses. La section S est constante et le matériau qui la constitue est isotrope et de comportement linéaire non dissipatif.

On suppose des couples dynamiques agissant suivant l'axe x le long de la barre notées $\gamma(x, t)$.

On considère de petites rotations $\theta(x, t)$ des sections droites autour de leur position d'équilibre statique.

L'élément de moment quadratique I_x présente un moment d'inertie $\rho I_x dx$. Il est mis en mouvement avec l'accélération angulaire $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ par l'action du moment $-M(x)$ à gauche, du moment en réaction $M(x + dx) = M(x) + \frac{\partial M}{\partial x} dx$ à droite et du couple extérieur $\gamma(x, t)$.

L'équilibre dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho I_x dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= -M(x) + M(x) + \frac{\partial M}{\partial x} dx + \gamma(x, t) dx \\ \Leftrightarrow \rho I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \gamma(x, t) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\rho I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x} + \gamma(x, t)$$

La loi de comportement élastique en rotation pure permet d'exprimer le moment M en fonction du déplacement $\theta(x, t)$:

$$M = G I_x \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

En substituant M par cette expression dans l'équation d'équilibre dynamique, on obtient :

$$\rho I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (G I_x \frac{\partial \theta}{\partial x}) + \gamma(x, t)$$

Comme, par hypothèse, G et I_x sont constants le long de la barre, on a :

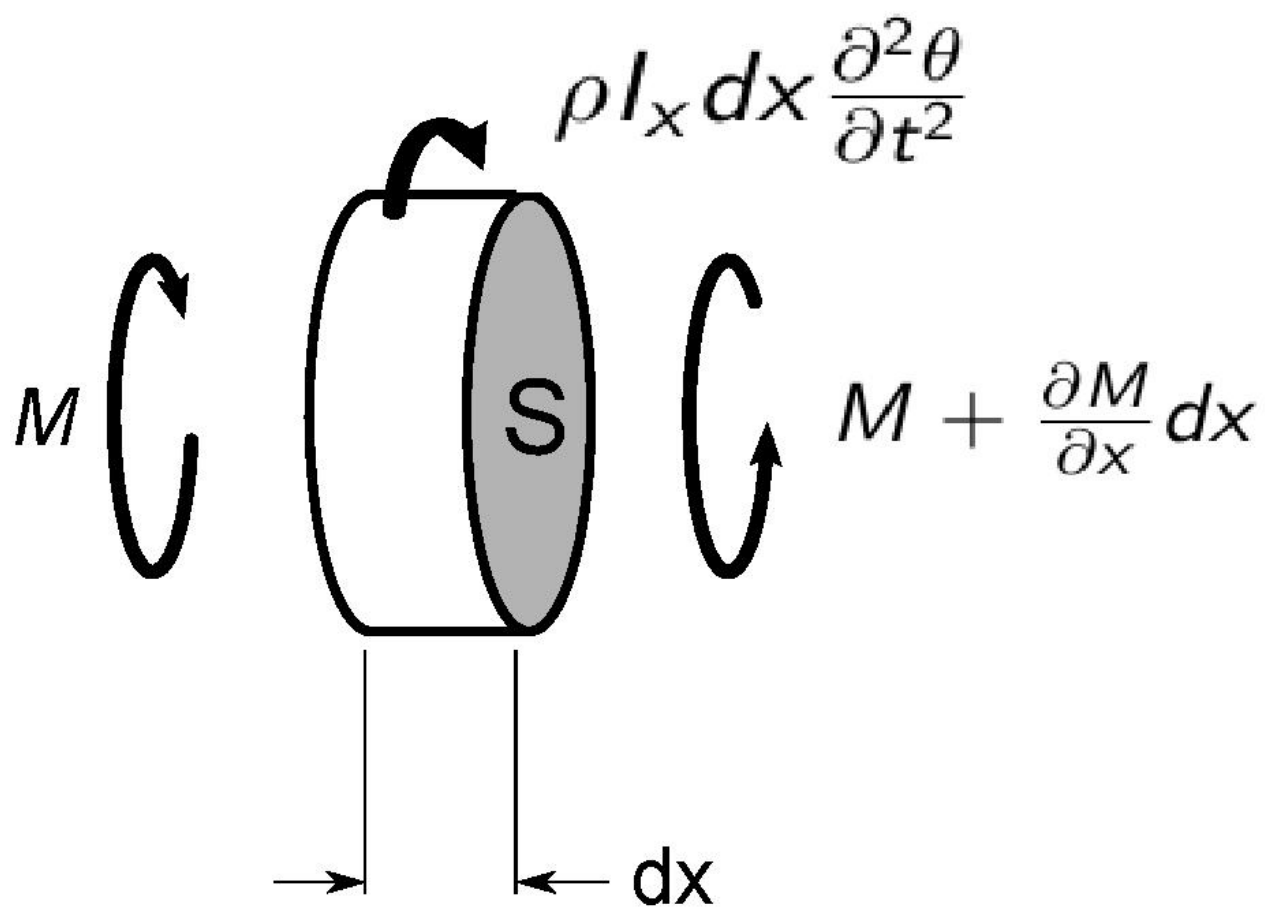


Figure 4.20: Bilan des moments sur une section élémentaire de la barre

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{I_x} \gamma(x, t)$$

On note $c_R^2 = \frac{G}{\rho}$ soit:

$$c_R = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}$$

Et on obtient finalement l'équation des ondes de torsion dans la barre :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_R^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho I_x} \gamma(x, t)$$

Comme précédemment c_R a la dimension d'une vitesse :

$$[c_R] = \left[\sqrt{\frac{G}{\rho}} \right] = \sqrt{\frac{N/m^2}{kg/m^3}} = \sqrt{\frac{(kgm/s^2)/m^2}{kg/m^3}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}$$

c_R est la vitesse de propagation des ondes de torsion dans la barre.

Dans une barre en acier, par exemple, on a :

$$c_{R_{acier}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} = \sqrt{\frac{2.10^{11}}{2 \times (1+0.3) \times 8.10^3}} = 2000 \text{m/s}$$

partie II

Exercices vibrations

5 Modèles à 1 DDL

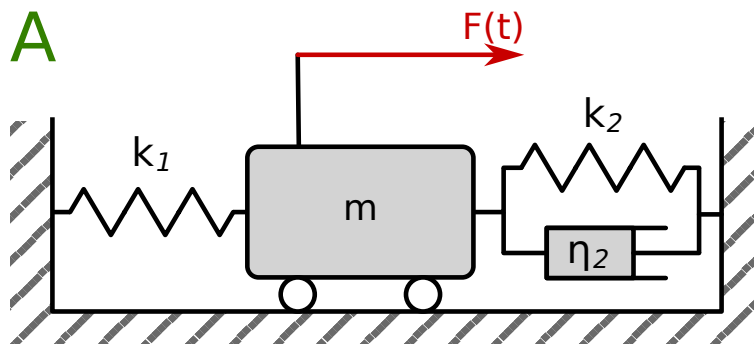


Figure 5.1: Chariot attaché à deux ressorts et un amortisseur

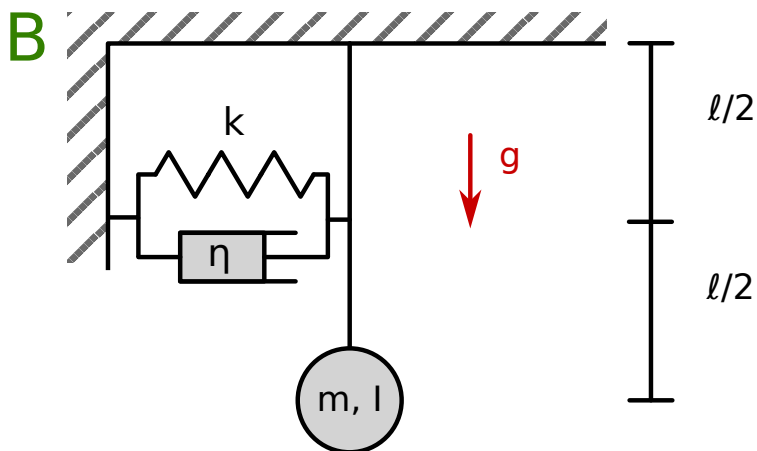


Figure 5.2: Pendule attaché à un ressort et un amortisseur

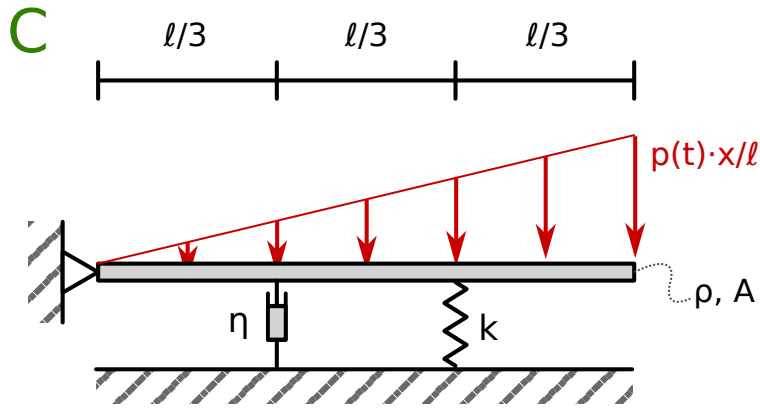


Figure 5.3: Poutre rigide attachée à un ressort et un amortisseur

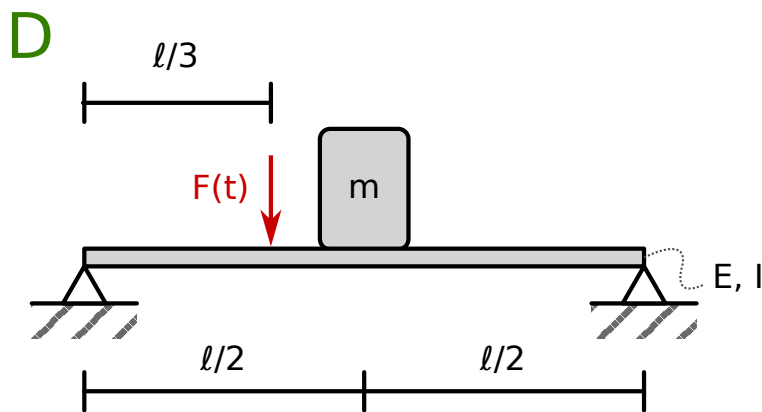


Figure 5.4: Masse ponctuelle posée sur une poutre élastique

5.1 Mise en équation

Pour les systèmes à un degré de liberté de A à D ci-dessus, on souhaite établir l'équation de la dynamique. Pour cela, on va utiliser l'approche énergétique Lagrangienne. Il faut donc:

1. Introduire une paramétrisation du mouvement des masses (translation, rotation). On notera ce degré de liberté généralisé $x(t)$.
2. Calculer l'énergie cinétique totale $T(\dot{x})$.
3. Calculer l'énergie potentielle totale $U(x)$.
4. Calculer le travail virtuel (ou puissance virtuelle) des efforts externes et/ou dissipatifs $\delta W = \sum \delta W_{\text{ex/d}} = Q\delta x$ ou δx est un déplacement (ou une rotation) virtuel. Q est un effort externe généralisé que l'on déduit du travail virtuel.
5. Poser l'équation d'Euler-Lagrange avec le Lagrangien $\mathcal{L} = T - U$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = Q$$

i Note

On supposera la force dissipative proportionnelle à la vitesse.

i Notes sur B

Le disque du pendule n'est pas une masse ponctuelle, et a un moment d'inertie noté I . On suppose la rotation du pendule suffisamment petite pour l'approximation des petits angles. On pourra chercher à établir un nombre sans dimension qui quantifie l'influence de la gravité sur la vibration par rapport à la raideur du ressort k .

i Notes sur C

On suppose la poutre rigide et la rotation suffisamment petite pour l'approximation des petits angles. On note ρ la masse volumique et A l'aire de sa section.

La sollicitation externe $p(x, t)$ est une force linéique, ou force répartie, de dimension Force/Longueur, et s'exprime comme:

$$p(x, t) = p(t) \frac{x}{\ell}$$

On pourra essayer deux paramétrisations différentes, par exemple la rotation de la barre et le déplacement de l'extrémité de la barre, et vérifier que la pulsation propre du système est indépendante de la paramétrisation.

i Notes sur D

Pour le système D, on suppose un déplacement vertical de la poutre de la forme:

$$u(x, t) = A(t) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

La fonction $A(t)$ est donc le degré de liberté du système. Selon le modèle d'Euler-Bernoulli, l'énergie potentielle de déformation d'une poutre s'écrit:

$$U = \int_0^\ell EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx,$$

Où E est le module d'Young et I le moment quadratique de la section de la poutre (que l'on suppose constants le long de la poutre). On suppose que la masse de la poutre est négligeable devant m et que la masse m reste tout le temps au contact de la poutre (pas de décollement).

5.2 Solutions

💡 Système A

Soit x le déplacement de la masse m par rapport à sa position d'équilibre. On suppose que x , $\dot{x}$, $\ddot{x}$ sont positifs vers la droite. La seule contribution d'inertie quand x varie est la masse m , on a donc:

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

On a deux contributions d'énergie potentielles, les ressorts k_1 et k_2 . Quand x varie les deux ressorts se déplacent de la même distance x . Leur contribution à l'énergie potentielle est alors:

$$U(x) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2x^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2$$

On remarque que dans cette configuration le système 2 ressorts est équivalent à un seul ressort de raideur $k_{eq} = k_1 + k_2$, comme si les ressorts étaient installés en parallèle.

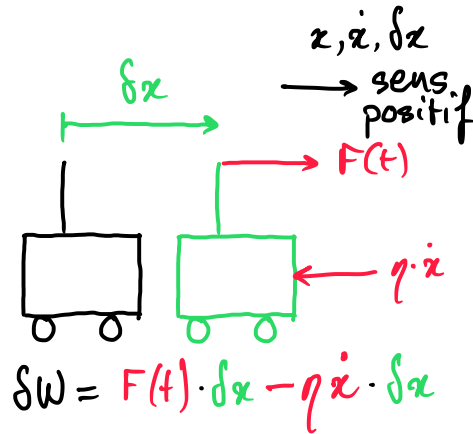


Figure 5.5: Travaux virtuels pour le système A

On a une force externe $F(t)$ et une force dissipative visqueuse $f_d = -\eta\dot{x}$ (ce genre de force agit toujours dans la direction opposée au mouvement, d'où le signe négatif). Si l'on soumet la masse à un déplacement virtuel δx dans le sens positif (le même sens que x et $\dot{x}$), le travail total des deux forces s'exprime:

$$\delta W = F(t)\delta x + f_d\delta x = F(t)\delta x - \eta\dot{x}\delta x = (F(t) - \eta\dot{x})\delta x,$$

d'où $Q = F(t) - \eta\dot{x}$. On peut alors établir l'équation de la dynamique avec Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = Q$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + (k_1 + k_2)x = F(t) - \eta\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + (k_1 + k_2)x = F(t)$$

💡 Système B

Soit θ la rotation du pendule par rapport à sa position d'équilibre. On suppose que $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ sont positifs dans le sens trigonométrique. On a deux contributions d'inertie quand θ varie: 1) le disque de masse m en translation, 2) le disque d'inertie I en rotation sur lui-même.

- 1) Petits angles, le déplacement linéique x de la masse s'exprime en fonction de θ comme

$$x = \theta\ell,$$

On a donc une contribution à l'énergie cinétique de $\frac{1}{2}m(\dot{\theta}\ell)^2$

- 2) Quand le pendule tourne de θ , le disque tourne sur lui-même avec un angle de θ . La contribution à l'énergie cinétique est donc $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$

L'énergie cinétique est donc:

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}(m\ell^2 + I)\dot{\theta}^2$$

i Note

On reconnaît le théorème de Steiner¹ pour l'inertie de rotation par rapport à un point qui n'est pas le centre de masse. On aurait très bien pu considérer une contribution unique d'inertie: le disque de masse m et d'inertie I (par rapport à son centre de masse) en rotation autour du point d'ancrage situé à une distance ℓ du centre de masse. En calculant l'inertie par rapport au point de rotation $I_c = m\ell^2 + I$, on a la bonne énergie cinétique.

On a ici deux contribution à l'énergie potentielle: 1) la gravité, 2) le ressort k . On analyse d'abord la gravité:

Quand θ varie, la masse monte d'une distance de $\ell(1 - \cos \theta)$. La contribution à l'énergie potentielle est donc de $mg\ell(1 - \cos \theta)$. On note:

1. Cette contribution n'est pas linéaire en θ et n'est donc pas une charge morte qui peut être ignorée : le poids tend à ramener le pendule vers sa position d'équilibre.
2. Sous l'hypothèse des petits angles, une approximation de $\cos \theta$ à l'ordre 0 ($\cos \theta \approx 1$) supprime complètement l'effet de la gravité (la contribution d'énergie potentielle est constante par rapport à θ). Il faut donc une approximation qui conserve la dépendance en θ , c'est-à-dire $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

Le ressort k subit un déplacement de $\sin(\theta)\frac{\ell}{2} \approx \theta\frac{\ell}{2}$. On peut donc écrire l'énergie potentielle totale:

$$\begin{aligned} U(\theta) &= \frac{1}{2}k \left(\frac{\theta\ell}{2} \right)^2 + mg\ell \left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{k\ell^2}{4} + mg\ell \right) \theta^2 \end{aligned}$$

On voit apparaître les deux contributions à la raideur totale du système. Le ratio de ces deux contributions donne un nombre sans dimension $\bar{K} = \frac{4mg}{k\ell}$. Si $\bar{K}$ est petit on peut négliger la gravité, à contrario si $\bar{K}$ est grand on peut négliger le ressort.

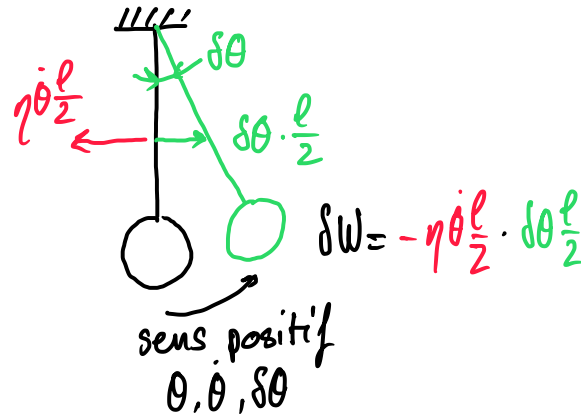


Figure 5.6: Travaux virtuels pour le système B

La seule force dissipative est celle de l'amortisseur linéaire f_d . La vitesse de déplacement de l'amortisseur est $\dot{\theta}\frac{\ell}{2}$, donc $f_d = -\eta\dot{x}$. Si l'on applique une rotation virtuelle $\delta\theta$ au pendule, le déplacement virtuel de l'amortisseur est $\frac{\ell}{2}\delta\theta$. Le travail virtuel est alors:

$$\delta W = f_d \cdot \frac{\ell}{2}\delta\theta = -\eta\dot{\theta}\frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2}\delta\theta = -\frac{\eta\ell^2}{4}\dot{\theta}\delta\theta.$$

On en déduit que l'effort généralisé est $Q = -\frac{\eta\ell^2}{4}\dot{\theta}$. En appliquant l'équation d'Euler-Lagrange, on trouve:

$$(m\ell^2 + I)\ddot{\theta} + \frac{\eta\ell^2}{4}\dot{\theta} + \left(\frac{k\ell^2}{4} + mg\ell \right) \theta = 0$$

¹Aussi connu sous le nom de théorème des axes parallèles, théorème de transport, théorème de Huygens-Steiner, c.f. [wikipedia](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Huygens-Steiner).

💡 Système C

On note θ la rotation de la barre (θ , $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ positifs dans le sens trigonométrique). Puisque la barre est en rotation autour de l'appui, on doit calculer son moment d'inertie par rapport à ce dernier. La barre étant continue, on a:

$$I = \int_A \int_0^\ell x^2 \rho \, dx \, dA = A \int_0^\ell \rho x^2 \, dx = \frac{\rho A \ell^3}{3} = \frac{m \ell^2}{3},$$

où $m = \rho A \ell$ est la masse de la barre. L'énergie cinétique est donc:

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} \frac{m \ell^2}{3} \dot{\theta}^2$$

Seul le ressort k contribue à l'énergie potentielle. Quand θ varie, le déplacement (petite rotation) est $\theta \frac{2\ell}{3}$. L'énergie potentielle est donc:

$$U(\theta) = \frac{1}{2} k \left(\frac{2\theta \ell}{3} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4k \ell^2}{9} \right) \theta^2$$

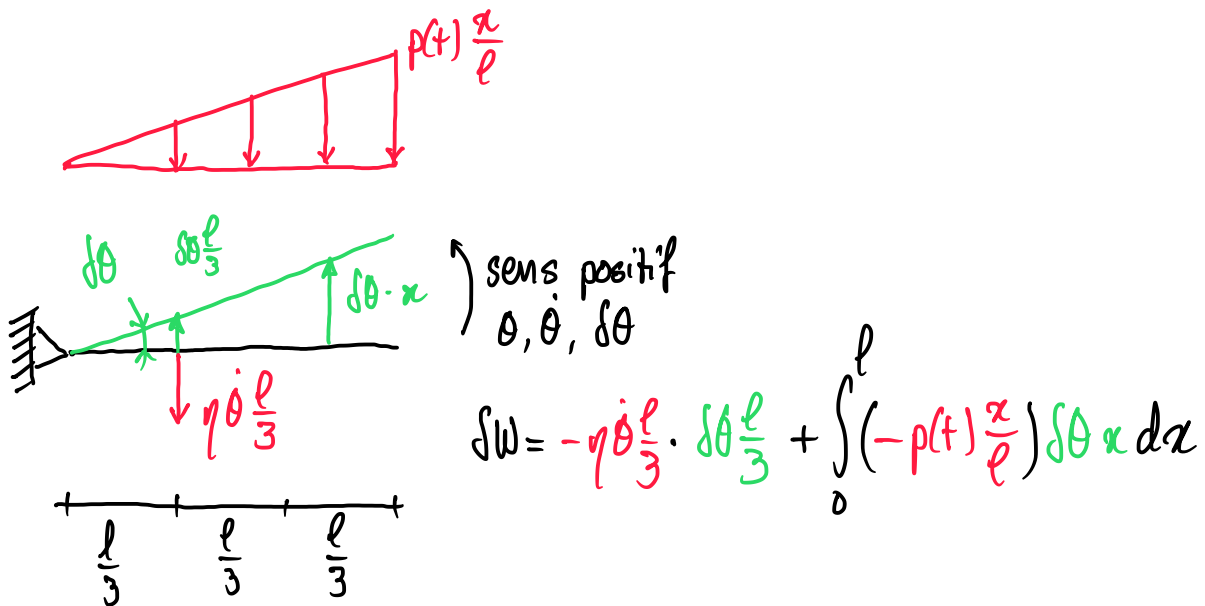


Figure 5.7: Travaux virtuels pour le système C

La partie difficile de cet exercice est le calcul des efforts généralisés. Le travail virtuel sur une rotation $\delta\theta$ de la force dans l'amortisseur se calcule de manière similaire au système B.

La vitesse de déplacement de l'amortisseur est $\dot{\theta} \frac{\ell}{3}$, et le déplacement virtuel est $\delta\theta \frac{\ell}{3}$. Le travail virtuel de la force d'amortissement est donc:

$$\delta W_d = f_d \cdot \delta \theta \frac{\ell}{3} = -\eta \dot{\theta} \frac{\ell}{3} \cdot \delta \theta \frac{\ell}{3} = -\frac{\eta \ell^2}{9} \dot{\theta} \delta \theta$$

Pour calculer le travail de $p(x, t) = p(t) \frac{x}{\ell}$, on regarde d'abord le travail pour un point x de la poutre. Le déplacement vertical du point x pour une rotation de $\delta \theta$ est de $x \delta \theta$, et est orienté vers le haut pour $\delta \theta$ positif. Comme la force répartie agit vers le bas, le travail est négatif et vaut $-p(t) \frac{x}{\ell} \cdot x \delta \theta$. Pour calculer le travail total, on intègre cette expression le long de la poutre.

$$\delta W_p = - \int_0^\ell p(t) \frac{x^2}{\ell} \delta \theta \, dx = -\frac{\ell^2}{3} p(t) \delta \theta$$

On en déduit l'effort externe généralisé:

$$Q = -\frac{\eta \ell^2}{9} \dot{\theta} - \frac{\ell^2}{3} p(t)$$

En posant l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient:

$$\frac{m \ell^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{\eta \ell^2}{9} \dot{\theta} + \frac{4k \ell^2}{9} \theta = -\frac{\ell^2}{3} p(t)$$

Système D

Puisqu'on suppose la forme de la vibration de la poutre (ce que l'on apprendra à faire dans la partie "systèmes continus" du cours), on a un seul degré de liberté A (positif vers le haut), qui est l'amplitude du déplacement de la poutre:

$$u(x, t) = A(t) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

On néglige l'inertie de la poutre (petite par rapport à la masse m). On n'a donc qu'une contribution à l'énergie cinétique. Puisque la masse reste collée à la poutre, son déplacement est $u(\ell/2, t) = A(t)$. L'énergie cinétique est donc:

$$T(\dot{A}) = \frac{1}{2} m \dot{A}^2$$

La seule contribution d'énergie potentielle est la flexion de la poutre. On donne ici l'expression de l'énergie potentielle en fonction de u :

$$\begin{aligned}
U(A) &= \int_0^\ell EI \left(-\frac{\pi^2 A}{\ell^2} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \right)^2 dx \\
&= \frac{\pi^4}{\ell^4} EI A^2 \int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx \\
&= \frac{\pi^4}{\ell^4} EI A^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{\pi^4 EI}{\ell^3} A^2
\end{aligned}$$

On peut vérifier l'homogénéité de cette énergie en vérifiant que EI/ℓ^3 est bien homogène à une raideur (Force/Longueur)².

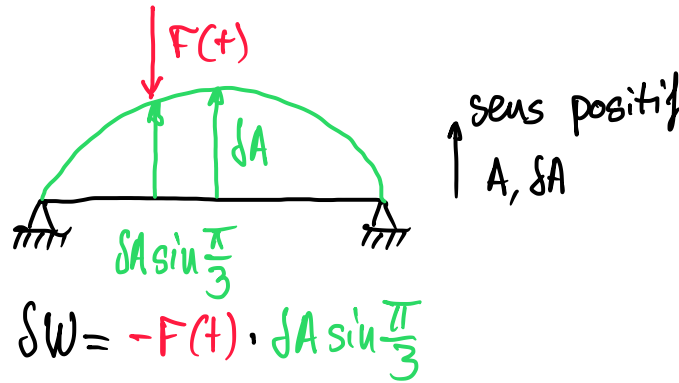


Figure 5.8: Travaux virtuels pour le système D

Pour calculer le travail de $F(t)$ sur un déplacement virtuel δA , on note que le point d'application de $F(t)$ se déplace verticalement (vers le haut) de $\delta A \sin(\pi/3) = \sqrt{3}\delta A/2$. Puisque $F(t)$ agit vers le bas, le travail est:

$$\delta W = -F(t) \frac{\sqrt{3}}{2} \delta A,$$

d'où l'on déduit $Q = -\frac{\sqrt{3}}{2} F(t)$, et l'équation du mouvement s'établit aisément:

$$m\ddot{A} + \frac{\pi^4 EI}{\ell^3} A = -\frac{\sqrt{3}}{2} F(t)$$

²Rappel: E est homogène à une pression et I à Longueur⁴

6 Le salaire de la peur

Dans le film "le salaire de la peur" (H.G. Clouzot, 1953), des camions doivent transporter un chargement de nitroglycérine destiné à souffler un puits de pétrole en feu. Le parcours de plusieurs centaines de kilomètres emprunte une piste cabossée qui oblige le convoi à rouler lentement pour éviter les soubresauts qui pourraient provoquer l'explosion du chargement.

Le camion est modélisé comme un système à 1 DDL. L'objectif du problème est de dimensionner la suspension (raideur k , amortissement c) pour assurer la sécurité du convoi. La masse M de la partie suspendue (Moteur + Cabine + Remorque + Chargement) est évaluée à 15 tonnes. Les roues sont supposées rigides et transmettent intégralement les variations de hauteur de la route.

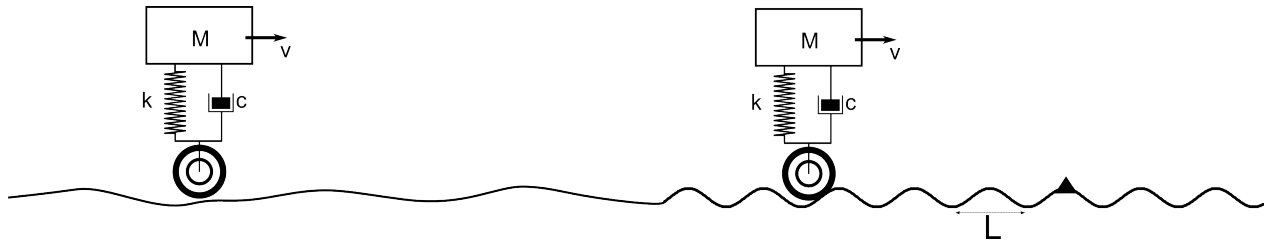


Figure 6.1: Amortisseur sur route

On note x la variable qui décrit la trajectoire horizontale du convoi. Celle-ci est parcourue à la vitesse v . La hauteur variable de la piste est notée $h(x)$. On note z_0 la position d'équilibre de la masse pour une hauteur fixe de la route h_0 . On note $z(t)$ le déplacement de la masse par rapport à z_0 .

Établir l'équation du mouvement de la masse M par l'équation d'Euler-Lagrange.

💡 Solution

Le déplacement z est mesuré dans un repère fixe (donc galiléen). Lorsque z varie, la seule contribution d'inertie vient de la masse, et

$$T(\dot{z}) = \frac{1}{2}M\dot{z}^2.$$

Si z est fixe et que h varie, il n'y a pas de changement d'énergie cinétique dans le repère fixe. L'énergie potentielle vient du ressort k , et elle varie quand z varie mais aussi quand h varie. Le déplacement du ressort est $z - h$, et l'énergie potentielle est:

$$U(z) = \frac{1}{2}k(z - h)^2.$$

La force de l'amortisseur dépend de la vitesse d'allongement $\dot{z} - \dot{h}$. Le travail de la force sur un déplacement virtuel δz est:

$$\delta W = -c(\dot{z} - \dot{h})\delta z,$$

On en déduit $Q = -c(\dot{z} - \dot{h})$, et l'équation de mouvement:

$$\begin{aligned} M\ddot{z} + k(z - h) &= -c(\dot{z} - \dot{h}) \\ \Leftrightarrow M\ddot{z} + c\dot{z} + kz &= kh + c\dot{h} \end{aligned}$$

On a utilisé pour l'équation ci-dessus une position d'équilibre fixe z_0 , mais si l'on prend en compte la hauteur variable de la route, la "vraie" position d'équilibre dépend de h . On note que le déplacement par rapport à cette position d'équilibre variable est $y = z - h$.

Mise en garde

Le déplacement y est mesuré par rapport à une référence qui varie: il est donc mesuré dans un référentiel qui "suit" la hauteur de la route et est **non-galiléen**, et l'énergie cinétique de la masse doit tenir compte de la vitesse du référentiel par rapport à un référentiel galiléen. Cette vitesse est $\dot{h}$ et $T(\dot{y}) = \frac{1}{2}M(\dot{y} + \dot{h})^2$.

On peut établir l'équation de mouvement en y par changement de variable sur l'équation en z ou par Euler-Lagrange avec la bonne énergie cinétique, et on obtient:

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -M\ddot{h}.$$

Notez que la fréquence propre ω_0 est indépendante du choix de référentiel. Les deux équations de la dynamique sont strictement équivalentes à un changement de variable près.

Mettre l'équation du mouvement sous la forme faisant intervenir les paramètres pulsation propre ω_0 et amortissement ξ , dont on donnera les expressions en fonction des paramètres mécaniques

Solution

On peut écrire l'équation sous la forme générale :

$$\ddot{z} + \frac{c}{M}\dot{z} + \frac{k}{M}z = \frac{c}{M}\dot{h} + \frac{k}{M}h$$

Soit :

$$\ddot{z} + 2\xi\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = 2\xi\omega_0\dot{h} + \omega_0^2 h$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \xi = \frac{c}{2M\omega_0}$$

Évaluer la raideur k de la suspension qui procure au système une fréquence propre $f_0 = 12$ Hz.

 Solution

La pulsation propre est $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

Donc $k = 4\pi^2 f_0^2 M = 4\pi^2 \times 12^2 \times 15 \cdot 10^3 = 8,5 \cdot 10^7$ N/m.

On souhaite que le système soit sous-amorti à 10% ($\xi = 0.1$). Quel coefficient d'amortissement c doit avoir la suspension hydraulique ? Quel est le temps caractéristique de décroissance des vibrations libres ?

 Solution

Le facteur d'amortissement est $\xi = \frac{c}{2M\omega_0}$, donc $c = 2M\omega_0\xi = 2 \times 15 \cdot 10^3 \times 2\pi \times 12 \times 0,1 = 2,3 \cdot 10^5$ N/(m/s).

Pour le temps caractéristique, on a $\tau = (\xi\omega_0)^{-1} = \frac{1}{2\pi\xi f_0} = \frac{1}{2,4\pi}$ s ≈ 0.13 s.

Un moment fort du film survient lorsque le convoi doit franchir une portion de quelques kilomètres de piste constituée de vaguelettes de terre qui exciteront inévitablement la structure.

On peut modéliser ce passage de route, appelé "tôle ondulée", par une sinusoïde d'amplitude $A = 10$ cm et de longueur d'onde $L = 25$ cm (voir schéma). Préciser la relation entre la fréquence de l'excitation du système et la vitesse V du camion.

 Solution

Les variations de hauteur de la route en fonction de x s'écrivent :

$$h(x) = A \sin \frac{2\pi x}{L}.$$

On a supposé qu'en $x = 0$, $h(0) = 0$ pour éviter d'introduire un déphasage. La route est parcourue à la vitesse constante V . La trajectoire horizontale du camion est donc $x(t) = Vt$ si $x(0) = 0$. Donc les variations de hauteur de la route vues par le chauffeur en fonction du temps s'écrivent :

$$h(t) = A \sin \frac{2\pi Vt}{L} = A \sin 2\pi ft = A \sin \Omega t,$$

d'où la fréquence d'excitation $f = \frac{V}{L}$.

Déterminer la forme du mouvement vibratoire vertical $z(t)$ du camion en fonction du temps et préciser l'amplitude du déplacement.

Solution

Avec $h(t) = A \sin \Omega t$, l'équation du mouvement s'écrit:

$$\begin{aligned}\ddot{z} + 2\xi\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z &= 2\xi\omega_0\dot{h} + \omega_0 h \\ &= A\omega_0(2\xi\Omega \cos \Omega t + \sin \Omega t)\end{aligned}$$

On a deux forces harmoniques de même fréquence, on peut donc les réunir en un seul terme:

$$\begin{aligned}2\xi\Omega \cos \Omega t + \sin \Omega t &= -2\xi\Omega \sin\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \Omega t \\ &= \text{Im} \left[-2\xi\Omega e^{i(\Omega t - \pi/2)} + e^{i\Omega t} \right] \\ &= \text{Im} \left[e^{i\Omega t} (2i\xi\Omega + 1) \right]\end{aligned}$$

On exprime le complexe $\omega_0 + 2i\xi\Omega = \beta e^{i\varphi}$ en notation polaire, avec:

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{(2\xi\Omega)^2 + \omega_0^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_0}\right)\end{aligned}$$

On peut donc écrire le terme de forçage comme:

$$2\xi\omega_0\dot{h} + \omega_0 h = B \sin(\Omega t + \varphi)$$

Avec $B = A\omega_0 \sqrt{(2\xi\Omega)^2 + \omega_0^2}$.

Note

Sans passer par les complexes, on peut poser:

$$B \sin(\Omega t + \varphi) = B \cos \Omega t \sin \varphi + B \sin \Omega t \cos \varphi = A\omega_0(2\xi\Omega \cos \Omega t + \sin \Omega t)$$

Puisque les fonctions $\sin \Omega t$ et $\cos \Omega t$ sont linéairement indépendantes, on peut poser deux équations:

$$\begin{aligned}B \sin \varphi &= A\omega_0 2\xi\Omega \\ B \cos \varphi &= A\omega_0^2\end{aligned}$$

Résoudre pour B et φ donne le résultat escompté.

Pour résoudre la suite du problème, on passe en notation complexe.

On écrit l'équation du mouvement :

$$\ddot{z} + 2\xi\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = B \sin(\Omega t + \varphi) = \Im [Be^{j(\Omega t + \varphi)}] .$$

La réponse du système est recherchée sous la même forme que l'excitation : $z(t) = \Im [\tilde{z}(t)]$ avec $\tilde{z}(t) = Ze^{j(\Omega t + \varphi + \psi)}$. On a donc en complexe :

$$\ddot{\tilde{z}} + 2\xi\omega_0\dot{\tilde{z}} + \omega_0^2 \tilde{z} = Be^{j(\Omega t + \varphi)} \iff (\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\xi\omega_0\Omega) Ze^{j\psi} = B$$

On a donc

$$Ze^{j\psi} = \frac{B(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2j\xi\omega_0\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2},$$

avec $Z = \sqrt{\Re^2 + \Im^2}$ et $\psi = -\arctan\left(\frac{\Im}{\Re}\right)$

$$\begin{cases} Z = \frac{B\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2}}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2} = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2}} = \frac{A\omega_0\sqrt{4\xi^2\Omega^2 + \omega_0^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2}}, \\ \psi = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right). \end{cases}$$

Tracer l'évolution de l'amplitude du déplacement en fonction de la fréquence $f = \Omega/2\pi$. et de la vitesse v du camion.

Quelle allure est la mieux adaptée au franchissement de cette zone de "tôle ondulée"? Justifier le meilleur choix.

Solution

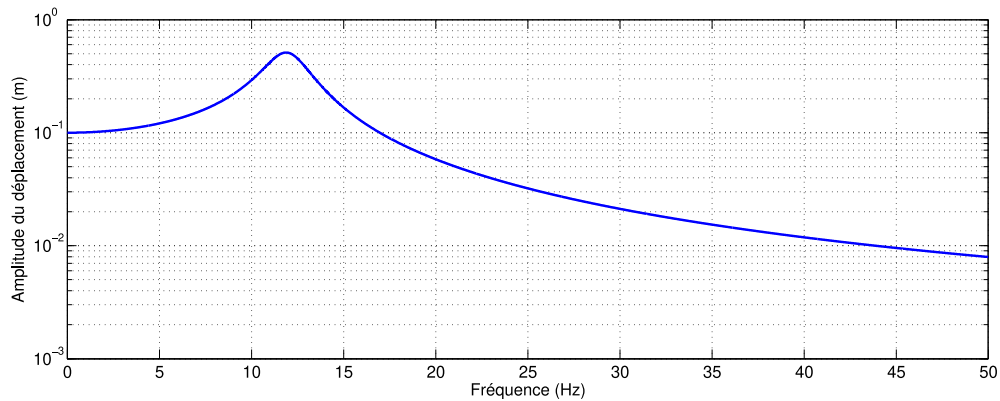


Figure 6.2: Fonction de transfert

La suspension est un filtre passe bas.

- Avant la résonance, c'est-à-dire pour les basses fréquences et donc les basses vitesses,

l'amplitude des ondulations de la route sera presque intégralement transmise. Ce qui est trop fort.

- Autour de la résonance elle sera fortement amplifiée, ce qui est encore pire
- Après la résonance, au contraire, l'amortisseur absorbe les ondulations. Il faut donc adopter une vitesse correspondant à une fréquence bien supérieure à la fréquence propre.

À quelle vitesse minimale le camion doit-il rouler pour que l'amplitude vibratoire du camion soit inférieure à 1 cm ?

 Solution

La fréquence correspondant à une amplitude de 1 cm est $f = 44$ Hz. Il faut rouler au moins à une vitesse $V = fL = 11$ m/s = 39,6 km/h.

7 Le lave-linge

On s'intéresse aux vibrations générées par une machine à laver le linge. Lorsque la machine tourne à vide, aucune vibration n'est engendrée, mais lorsque du linge est présent dans le tambour, des vibrations intenses du tambour apparaissent, dues à une distribution inhomogène du linge.

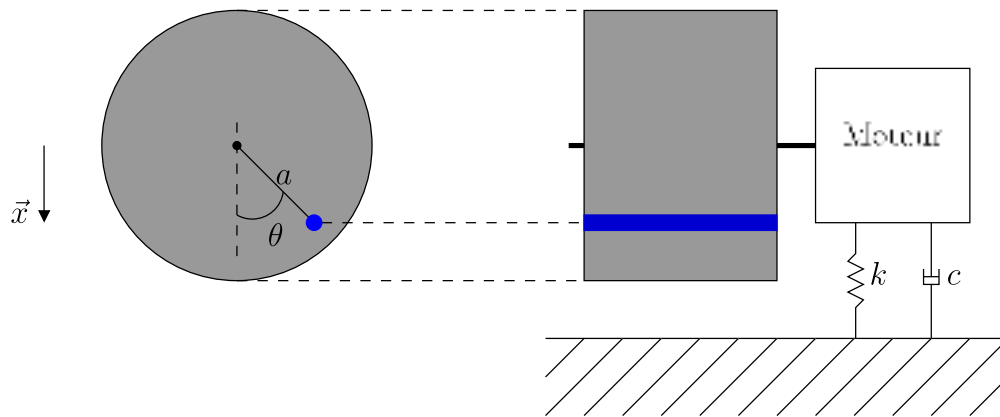


Figure 7.1: Lave linge

La machine à laver, composée du moteur et du tambour, constitue une structure de masse M . Cette structure est liée à son support par une suspension de raideur k et de coefficient d'amortissement c . Le linge est assimilé à une masse ponctuelle m située à une distance a de l'axe de rotation du tambour. Le problème est supposé plan et les mouvements horizontaux de la structure sont négligés. La force d'inertie verticale induite par la rotation du linge est notée F . On note également :

$x(t)$	la position verticale de l'axe du moteur,
$x_m(t)$	la position verticale du linge,
θ	l'angle entre le rayon passant par le linge et la verticale, contrôlé par le moteur,
$\Omega = \dot{\theta}$	la vitesse de rotation du moteur,
$\alpha = \ddot{\theta}$	l'accélération de rotation du moteur.

En utilisant une approche énergétique, montrer que l'équation différentielle du mouvement pour $x(t)$ s'écrit:

$$(M + m)\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = ma [\Omega^2 \cos(\Omega t) + \alpha \sin(\Omega t)] .$$

💡 Solution

On a deux masses qui contribuent à l'énergie cinétique. Comme pour l'exercice précédent, il faut choisir un référentiel inertiel pour exprimer l'énergie cinétique. On choisit ici le référentiel de la base de la machine. Dans ce référentiel, la vitesse verticale du moteur est $\dot{x}$ et son énergie cinétique est simplement: $\frac{1}{2}M\dot{x}^2$. Pour le linge, il faut exprimer sa vitesse verticale (on ignore les mouvements horizontaux) dans le référentiel de la base. La position x_m est donc une composition de la position x et de l'angle θ :

$$x_m = x + a \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_m = \dot{x} - a\dot{\theta} \sin \theta$$

L'énergie cinétique totale est donc:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} - a\dot{\theta} \sin \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - m\dot{x}a\dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 - m\dot{x}a\dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

📌 Note

On remarque que contrairement aux exercices précédents, on a un terme de l'énergie cinétique qui dépend linéairement de $\dot{x}$ et qui dépend du temps: il va donc apparaître comme un terme de forçage dans l'équation finale.

L'énergie potentielle est triviale:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Le travail virtuel de la force dissipative sur un déplacement δx est également facile à déterminer:

$$\delta W = -c\dot{x}\delta x \quad \Rightarrow \quad Q = -c\dot{x}$$

L'équation d'Euler-Lagrange donne:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial(T - U)}{\partial x} &= Q \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left((M + m)\dot{x} - ma\dot{\theta} \sin \theta \right) + kx &= -c\dot{x} \\ \Rightarrow (M + m)\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= \frac{d}{dt} (ma\dot{\theta} \sin \theta) = ma(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \end{aligned}$$

Avec $\alpha = \ddot{\theta}$ et $\Omega = \dot{\theta}$ on a la bonne expression.

Quelle est la pulsation propre ω_0 de la structure ?

 Solution

La pulsation propre a pour expression

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+m}}.$$

Dans la suite, on considère le régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque le moteur a atteint une vitesse de rotation Ω constante. Simplifier l'équation du mouvement et la mettre sous la forme :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = A_0\Omega^2 \cos(\Omega t).$$

Identifier ξ et A_0 .

 Solution

Compte tenu de la relation $\alpha = 0$, l'équation du mouvement peut être mise sous la forme,

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{M+m}\dot{x}(t) + \frac{k}{M+m}x(t) = \frac{ma\Omega^2}{M+m} \cos(\Omega t),$$

ou encore sous la forme,

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = A_0\Omega^2 \cos(\Omega t),$$

en posant :

$$\begin{cases} \xi = \frac{c}{2\omega_0(M+m)}, \\ A_0 = \frac{ma}{M+m}. \end{cases}$$

Calculer l'expression de l'amplitude X du déplacement de la structure en fonction de Ω .

 Solution

La solution de l'équation du mouvement obtenue à la question 4) est recherchée sous la forme complexe :

$$x(t) = \Re [X(\Omega)e^{i\Omega t + \Phi}].$$

Le report de cette expression dans l'équation du mouvement conduit à l'expression

$$X = \frac{A_0\Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\Omega\omega_0\xi)^2}}.$$

On mesure le déplacement d'une telle machine avec les paramètres suivants: le linge a une masse $m = 3 \text{ kg}$ et est positionné à une distance $a = 25 \text{ cm}$. Les courbes représentant X en fonction de la vitesse de rotation Ω sont données ci-dessous

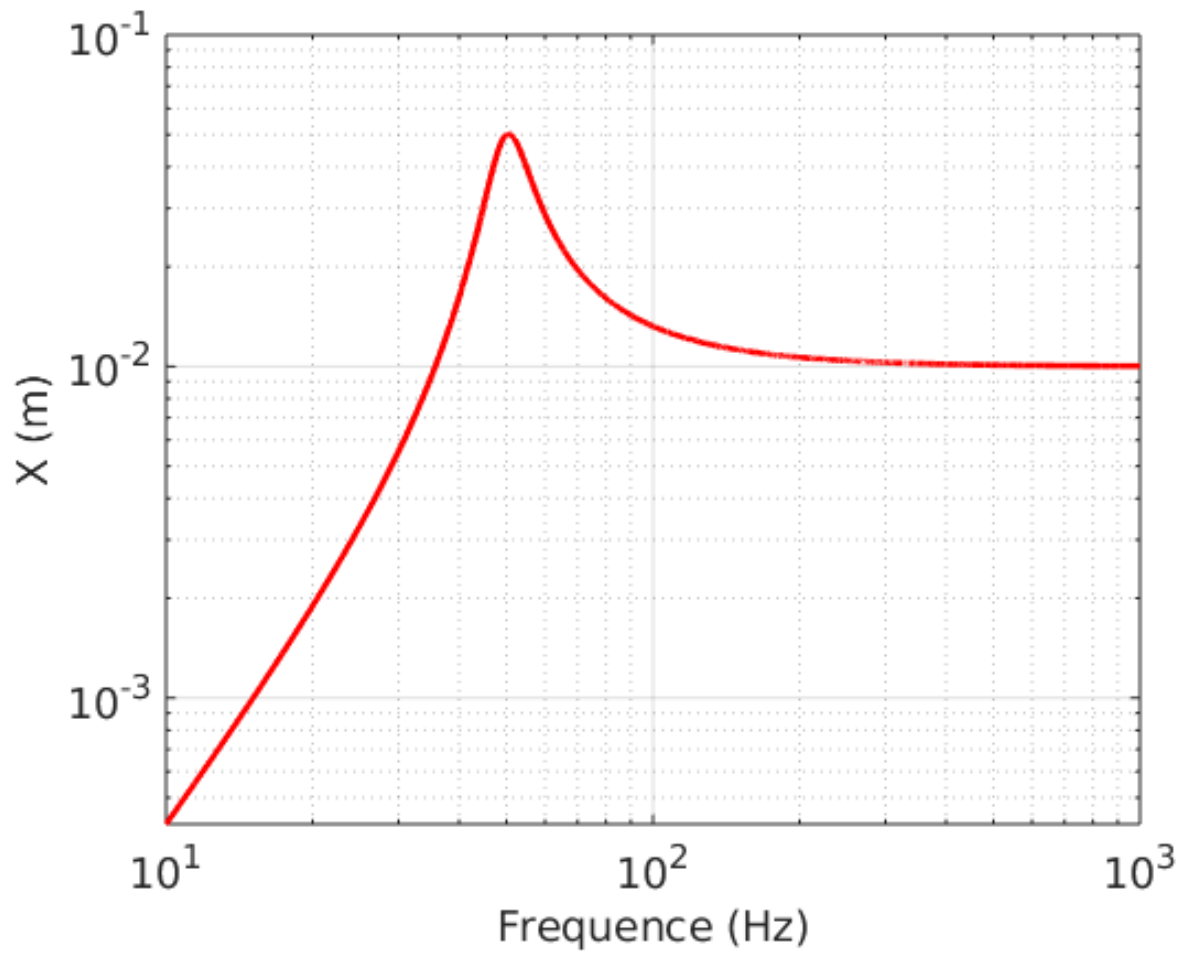


Figure 7.2: Fonction de réponse

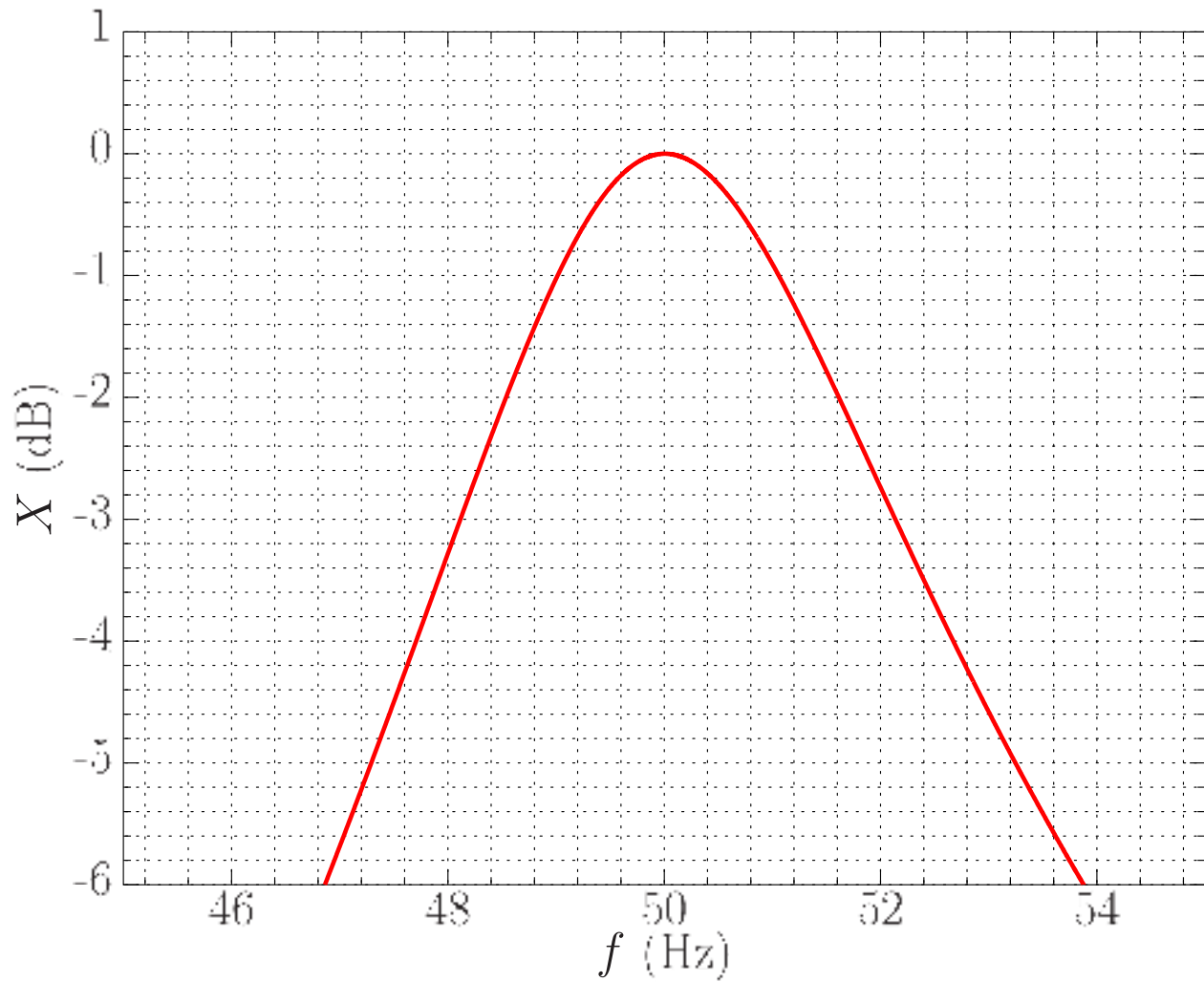


Figure 7.3: Fonction de réponse en dB

Vers quelle valeur tend l'amplitude du déplacement X lorsque $\Omega \gg \omega_0$? En déduire la masse de la structure.

 Solution

Lorsque $\Omega \gg \omega_0$, l'amplitude X tend vers A_0 . L'amplitude A_0 ayant pour valeur 10^{-2} , la masse M a donc pour valeur,

$$M = \frac{m(a - A_0)}{A_0} = \frac{3(25 \cdot 10^{-2} - 10^{-2})}{10^{-2}} = 72 \text{ kg.}$$

Mesurer une valeur approchée de ω_0 et en déduire celle de la raideur k .

💡 Solution

La résonance a lieu pour la fréquence de rotation $f = 50$ tours par seconde. La raideur de la structure est donc :

$$k = 4\pi^2(M + m)f^2 = 4\pi^2 \cdot 75 \text{ kg} \cdot (50 \text{ s}^{-1})^2 = 4\pi^2 \cdot 75 \cdot 2500 \text{ N/m} \approx 7.4 \text{ MN/m}$$

Mesurer l'amortissement ξ et en déduire la valeur du coefficient d'amortissement c .

💡 Solution

On regarde à quelles fréquences l'amplitude est plus faible de 3 dB par rapport au pic de résonance (ce qui correspond à une perte de puissance d'un facteur 2). On a $f_1 \approx 48 \text{ Hz}$ et $f_2 \approx 52 \text{ Hz}$, donc

Le coefficient ξ correspond à :

$$\xi = \frac{\Delta f_{-3\text{dB}}}{2f_0} \approx \frac{52 - 48}{2 \cdot 50} \approx 0.04$$

L'amortissement a donc pour valeur

$$c = 2\xi(M + m)(2\pi f_0) = 4\pi \cdot 0.04 \cdot 75 \text{ kg} \cdot 50 \text{ s}^{-1} \approx 47.1 \text{ kN/(m/s)}.$$

8 Vibrations d'un train à trois wagons

On étudie le modèle conservatif décrit par la figure suivante. Dans ce problème, les déplacements sont seulement horizontaux et la pesanteur n'est pas prise en compte. On note x_1, x_2, x_3 les positions respectives des 3 mobiles par rapport à leur position d'équilibre statique.

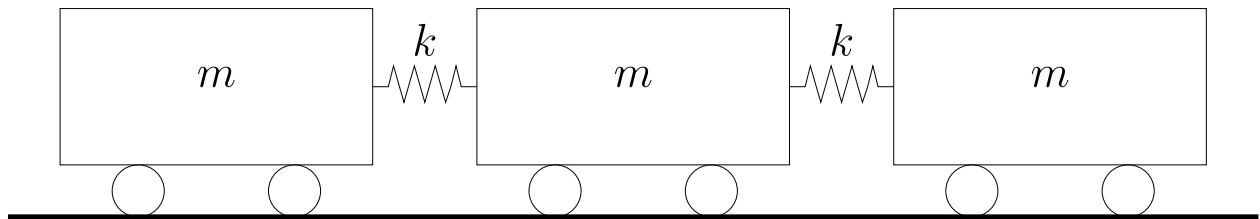


Figure 8.1: Train à 3 wagons

8.1 Régime d'oscillations libres

Écrire les énergies cinétique T et potentielle U .

💡 Solution

L'énergie potentielle a pour expression

$$U = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_3^2 - kx_1x_2 - kx_2x_3.$$

L'énergie cinétique a pour expression

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2.$$

Identifier les matrices de raideur $\mathbf{K}$ et d'inertie $\mathbf{M}$.

💡 Solution

On choisi comme vecteur des coordonnées généralisées $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Les expressions des éner-

gies cinétique et potentielles peuvent être mises sous les formes respectives

$$U = \frac{1}{2}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{K} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)\mathbf{M} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix},$$

où les matrices d'inertie $\mathbf{M}$ et de raideur $\mathbf{K}$ ont pour expression

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}.$$

Déterminer les pulsations propres du système.

Solution

Des matrices déterminées à la question 2), le système d'équation suivant est obtenu :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \mathbf{K} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution du type

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} e^{j\omega t}.$$

On obtient alors

$$\begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont donc obtenues par l'annulation du déterminant de la matrice

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) &= (k - m\omega^2) [(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2] - k^2(k - m\omega^2) \\ &= (k - m\omega^2) [(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - 2k^2] \\ &= -m\omega^2(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2). \end{aligned}$$

Ainsi, les trois pulsations propres ont pour expression

$$\begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \\ \omega_3 = \sqrt{3\frac{k}{m}}. \end{cases}$$

Calculer les vecteurs propres $\mathbf{X}_i$. Représenter et discuter leur forme.

Solution

On cherche les vecteurs propres $\mathbf{X}_i$ tels que $\mathbf{X}_i e^{j\omega_i t}$ soit solution du problème aux valeurs propres. Le vecteur propre $\mathbf{X}_i = {}^t(X_{1i}, X_{2i}, X_{3i})$ se calcule pour chaque valeur propre à partir de l'expression

$$\begin{pmatrix} k - m\omega_i^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega_i^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ X_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc pour ω_1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc pour ω_2

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc pour ω_3

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice modale $\mathbf{X}$.

💡 Solution

La matrice modale a pour expression

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En passant par la base modale, déterminer la forme générale des mouvements libres des 3 wagons

💡 Solution

L'équation matricielle du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

En passant dans la base modale, on arrive au système découplé

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{p} = \mathbf{0}$$

Qui donne :

$$\begin{cases} \ddot{p}_1(t) = 0 \\ \ddot{p}_2(t) + \omega_2^2 p_2(t) = 0 \\ \ddot{p}_3(t) + \omega_3^2 p_3(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1(t) = A_{11}t + A_{12} \\ p_2(t) = A_{21} \cos(\omega_2 t) + A_{22} \sin(\omega_2 t) \\ p_3(t) = A_{31} \cos(\omega_3 t) + A_{32} \sin(\omega_3 t) \end{cases}$$

Et le mouvement libre de chacun des 3 wagons est obtenu par $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}\mathbf{p}(t)$:

$$\begin{cases} x_1(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) \\ x_2(t) = p_1(t) - 2p_3(t) \\ x_3(t) = p_1(t) - p_2(t) + p_3(t) \end{cases}$$

La voiture 1 est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $v_0 = 1 \text{ m/s}$ et roule vers les autres voitures immobiles. À l'instant $t = 0$, le contact se produit et les trois voitures restent accouplées.

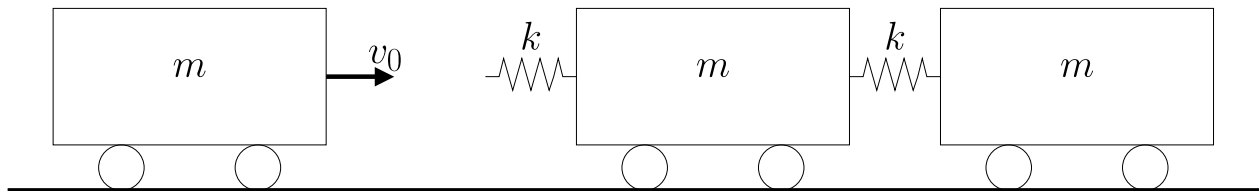


Figure 8.2: Train avec impact

Donner les 6 équations qui permettent d'obtenir les valeurs numériques des amplitudes des modes.

💡 Solution

Les conditions aux limites pour les positions initiales sont

$$\vec{x}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{\vec{x}}(t=0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les conditions initiales sur le déplacement,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donnent directement $A_{12} = A_{21} = A_{31} = 0$. Les conditions initiales sur la vitesse,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ \omega_2 A_{22} \\ \omega_3 A_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

fournissent le système suivant :

$$\begin{pmatrix} A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{32} \\ A_{11} - 2\omega_3 A_{32} \\ A_{11} - \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient finalement

$$\begin{cases} A_{11} = \frac{v_0}{3}, \\ A_{22} = \frac{2\omega_2}{3\omega_3} \frac{v_0}{2}, \\ A_{32} = \frac{v_0}{6\omega_3}. \end{cases}$$

8.2 Régime d'oscillations forcées

Le train est désormais en roulement à la vitesse constante v . L'un des essieux de la voiture deux est grippé de telle sorte qu'il en résulte une force harmonique longitudinale d'amplitude F_2 et de pulsation Ω telle que $\Omega = v/R$, où R est le rayon des roues. Écrire le système matriciel qui détermine les amplitudes X_1, X_2, X_3 des mouvements des 3 voitures.

💡 Solution

Le travail virtuel a pour expression :

$$\delta W = \vec{F}(t) \cdot \delta \mathbf{x} = F_2 \sin(\Omega t) \delta x_2,$$

d'où

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_2 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice principale d'inertie a pour expression

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{X}^t \mathbf{M} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 6m \end{pmatrix}.$$

La matrice modale de raideur a pour expression

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{X}^t \mathbf{K} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 18k \end{pmatrix}.$$

La matrice des pulsations propres a pour expression

$$\Delta = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega_0^2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{p}$ a donc pour expression

$$\begin{aligned} \vec{p} &= (\Delta - \Omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{X}^t \vec{Q} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\Omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3\omega_0^2 - \Omega^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F_2 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{F_2 \sin(\Omega t)}{3m} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Omega^2} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3\omega_0^2 - \Omega^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{x}$ a donc pour expression

$$\vec{x} = \mathbf{X} \vec{p} = -\frac{F_2 \sin(\Omega t)}{3m} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Omega^2} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3\omega_0^2 - \Omega^2} \end{pmatrix} = -\frac{F_2 \sin(\Omega t)}{m\Omega^2(3\omega_0^2 - \Omega^2)} \begin{pmatrix} \omega_0^2 \\ \omega_0^2 - \Omega^2 \\ \omega_0^2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'expression de la fonction de transfert $H_2 = X_2/F_2$ en fonction du paramètre sans

dimension $\beta = \Omega/\omega_0$. En déduire deux vitesses de roulement caractéristiques du mouvement de 2.

 Solution

La fonction de transfert est donc :

$$H_2(\Omega) = \frac{X_2}{F_2} = \frac{1}{k} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2(\beta^2 - 3)}.$$

Deux vitesses caractéristiques sont

$$\begin{cases} V_1 = R\Omega_1 = R\omega_0, \\ V_2 = R\Omega_2 = \sqrt{3}R\omega_0. \end{cases}$$

9 Vibrations du châssis d'une voiture

L'objectif du problème est de modéliser simplement la réponse d'une automobile après le franchissement d'un ralentisseur. Cette réponse est étudiée du point de vue du passager, c'est à dire dans un repère lié au véhicule. L'automobile est modélisée par une poutre homogène de masse M et de longueur $2L$, supportée à ses deux extrémités par des suspensions identiques caractérisées par une raideur k et un amortissement c . Les roues et les pneumatiques sont supposés indéformables et de masse négligeable impliquant que les variations de la route sont intégralement transmises aux suspensions. Ce modèle induit deux degrés de liberté et on choisit comme coordonnées généralisées les déplacements verticaux z_A et z_B des extrémités A et B de la poutre, comptés à partir de la position d'équilibre statique.

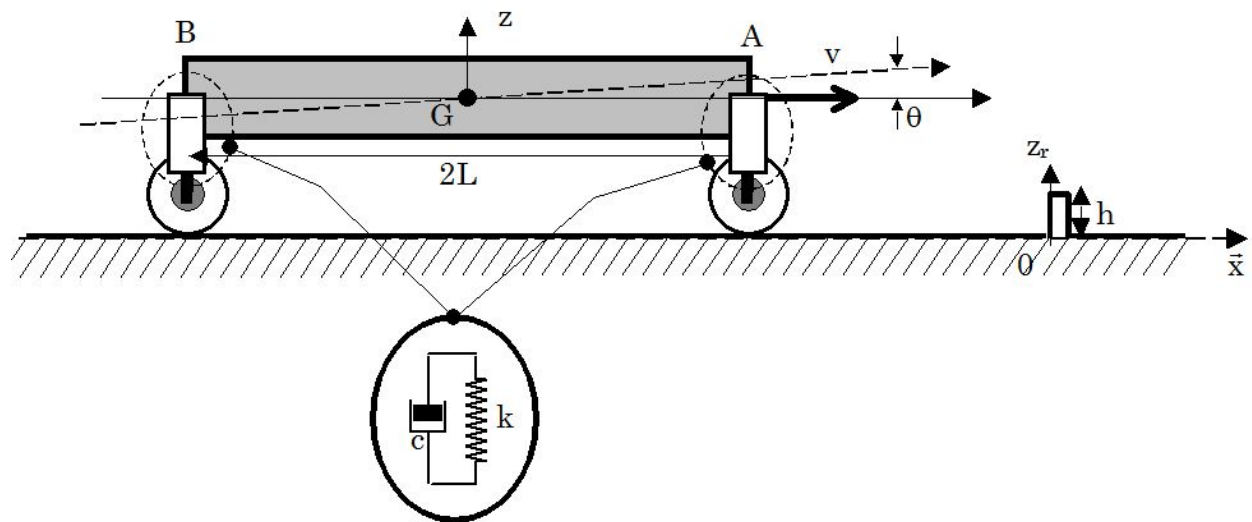


Figure 9.1: Voiture

9.1 Régime d'oscillations libres

Dans un souci de simplification, on considère dans un premier temps une route plane.

Déterminer les matrices d'inertie $\mathbf{M}$, de raideur $\mathbf{K}$ et de dissipation $\mathbf{C}$ du système.

💡 Solution

L'énergie potentielle a pour expression

$$U = \frac{1}{2}k(z_A^2 + z_B^2).$$

L'énergie cinétique a pour expression

$$T = \frac{1}{2}M\dot{z}_G^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

avec $I = \frac{ML^2}{3}$

$$z_G = \frac{z_A + z_B}{2} \text{ et } \tan\theta = \frac{z_A - z_B}{2L} \approx \theta \text{ (petits déplacements - petits angles)}$$

$$T = \frac{1}{2}M\left(\frac{\dot{z}_A + \dot{z}_B}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\left(\frac{\dot{z}_B - \dot{z}_A}{2L}\right)^2 = \frac{1}{6}M(\dot{z}_A^2 + \dot{z}_B^2 + \dot{z}_A\dot{z}_B)$$

La fonction de dissipation a pour expression

$$D = \frac{1}{2}c(\dot{z}_A^2 + \dot{z}_B^2).$$

Ces trois expressions peuvent être mises sous les formes respectives

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}(z_A, z_B)\mathbf{K} \begin{pmatrix} z_A \\ z_B \end{pmatrix}, \\ T = \frac{1}{2}(\dot{z}_A, \dot{z}_B)\mathbf{M} \begin{pmatrix} \dot{z}_A \\ \dot{z}_B \end{pmatrix}, \\ D = \frac{1}{2}(\dot{z}_A, \dot{z}_B)\mathbf{C} \begin{pmatrix} \dot{z}_A \\ \dot{z}_B \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où les matrices d'inertie $\mathbf{M}$, de raideur $\mathbf{K}$ et de dissipation $\mathbf{C}$ ont pour expression

$$\mathbf{M} = \frac{M}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire les pulsations propres du système.

💡 Solution

Des matrices déterminées à la question 1), le système d'équation suivant est obtenu :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \ddot{z}_A \\ \ddot{z}_B \end{pmatrix} + \mathbf{K} \begin{pmatrix} z_A \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution du type

$$\begin{pmatrix} z_A \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_A \\ Z_B \end{pmatrix} e^{j\omega t}.$$

On obtient alors

$$\begin{pmatrix} k - \frac{1}{3}M\omega^2 & -\frac{1}{6}M\omega^2 \\ -\frac{1}{6}M\omega^2 & k - \frac{1}{3}M\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_A \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont donc obtenues par l'annulation du déterminant de la matrice

$$\det(\omega) = (k - \frac{1}{3}M\omega^2)^2 - (\frac{1}{6}M\omega^2)^2 = (k - \frac{M\omega^2}{2})(k - \frac{M\omega^2}{6}).$$

Ainsi, les deux pulsations propres ont pour expression

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0\sqrt{2}, \\ \omega_2 = \omega_0\sqrt{6}, \end{cases}$$

avec $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$.

Déterminer et représenter les modes propres associés.

Solution

On cherche les vecteurs propres $\mathbf{X}_i$ tels que $\mathbf{X}_i e^{j\omega_i t}$ soit solution du problème aux valeurs propres. Le vecteur propre $\mathbf{X}_i = {}^t(X_{1i}, X_{2i})$ se calcule pour chaque valeur propre à partir de l'expression

$$\begin{pmatrix} k - \frac{1}{3}M\omega_1^2 & -\frac{1}{6}M\omega_1^2 \\ -\frac{1}{6}M\omega_1^2 & k - \frac{1}{3}M\omega_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc pour ω_1

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} X_{12} &= X_{11} \\ \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient donc pour ω_2

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{22} = -X_{21},$$

d'où

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le premier mode est assimilable à un mode de pompage toute la voiture vibre verticalement de manière uniforme. Le second mode est assimilable à un mode de tangage car les déplacements des extrémités sont de même valeur et de signes opposés.

En déduire l'expression de la matrice modale.

Solution

La matrice modale a pour expression

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Reprendre les questions 1 à 4 en considérant maintenant comme coordonnées généralisées le déplacement vertical z du centre d'inertie G de la poutre et l'angle de rotation θ de la poutre autour de G , comptés à partir de la position d'équilibre statique. Conclure

Solution

Si on prend z et θ à la place de z_A et z_B , on a

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}k(z + L\theta)^2 + \frac{1}{2}k(z - L\theta)^2 = \frac{1}{2}[2kz^2 + 2kL^2\theta^2], \\ T = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[M\dot{z}^2 + \frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2\right], \\ D = \frac{1}{2}c(\dot{z} + L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}c(\dot{z} - L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}[2c\dot{z}^2 + 2cL^2\dot{\theta}^2], \end{cases}$$

et donc les matrices d'inertie $\mathbf{M}$, de raideur $\mathbf{K}$ et de dissipation $\mathbf{C}$ ont pour expressions respectives

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{ML^2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2kL^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 2cL^2 \end{pmatrix}.$$

La résolution du problème aux valeurs propres conduit aux pulsations propres

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0\sqrt{2}, \\ \omega_2 = \omega_0\sqrt{6}, \end{cases}$$

et aux vecteurs propres associés :

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.2 Régime d'oscillations forcées

On considère maintenant que les variations de la hauteur $z_r(t)$ de la route se traduisent par les efforts $F_A(t)$ et $F_B(t)$ transmis au châssis par l'intermédiaire des suspensions respectivement en A et B . Le ralentisseur de hauteur h franchi par l'automobile est modélisé par une impulsion instantanée I donnée à la roue, qui se transcrit par une force $F_A(t) = I\delta(t)$, où $\delta(t)$ est la distribution de Dirac. On prend comme origine des temps l'instant où la première roue rencontre le ralentisseur. On note $t_0 = 2L/v$, l'instant où la deuxième roue rentre en contact avec l'amortisseur.

Donner l'expression de la force $F_B(t)$ en fonction de t_0 .

 Solution

$$F_B(t) = I\delta(t - t_0)$$

Déterminer les efforts généralisés Q pour un déplacement virtuel $\delta \mathbf{z} = (\delta z_A, \delta z_B)$.

 Solution

Le travail virtuel des efforts extérieurs ayant pour expression,

$$\delta W = F_A(t)\delta z_A + F_B(t)\delta z_B,$$

avec

$$\begin{cases} F_A(t) = I\delta(t), \\ F_B(t) = I\delta(t - t_0), \end{cases}$$

le vecteur des efforts généralisés s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} Q_{z_A} \\ Q_{z_B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I\delta(t) \\ I\delta(t - t_0) \end{pmatrix}.$$

Écrire les équations pour les coordonnées modales de la solution particulière $\mathbf{z}(t) = \mathbf{X}\mathbf{p}(t)$.

 Solution

Après passage dans la base modale, on a :

$$\begin{aligned} \ddot{p}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 &= \frac{\langle X_1, \mathbf{Q} \rangle}{\tilde{m}_1} = \frac{1}{m}(F_A(t) + F_B(t)) = \frac{I}{M}(\delta(t) + \delta(t - t_0)) \\ \ddot{p}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{p}_2 + \omega_2^2 p_2 &= \frac{\langle X_2, \mathbf{Q} \rangle}{\tilde{m}_2} = \frac{3}{m}(F_A(t) - F_B(t)) = \frac{3I}{M}(\delta(t) - \delta(t - t_0)) \end{aligned}$$

La matrice des masses modales pour (z_A, z_B) est :

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{M}{3} \end{pmatrix}$$

∴ On considère l'équation suivante:

$$\ddot{p} + 2\xi\omega\dot{p} + \omega^2 p = \frac{I}{M}\delta(t - t_0), \quad p(t) = 0, \quad \dot{p}(t) = 0 \text{ pour } t < t_0. \quad (9.1)$$

Intégrer l'équation sur $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ et montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{p}(t_0 + \varepsilon) = \dot{p}(t_0) = \frac{I}{M}$$

On s'aidera du fait que $p(t)$ est une fonction continue.

 Solution

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \ddot{p} dt + 2\xi\omega \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \dot{p} dt + \omega^2 \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} p dt \right\} = \frac{I}{M} \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \delta(t - t_0) dt$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ [\dot{p}(t_0 + \varepsilon) - \dot{p}(t_0 - \varepsilon)] + [p(t_0 + \varepsilon) - p(t_0 - \varepsilon)] + [P(t_0 + \varepsilon) - P(t_0 - \varepsilon)] \} = \frac{I}{M}$$

$$\dot{p}(t_0^+) = \frac{I}{M}$$

Un impulsion I est donc équivalente à une vitesse initiale $\frac{I}{M}$ au temps $t = t_0$. Donner l'expression de la solution de l'Équation 9.1.

 Solution

$$p(t) = \frac{I}{M\omega_d} e^{-\xi\omega(t-t_0)} \sin(\omega_d(t-t_0)), \quad \omega_d = \sqrt{1 - \xi^2}\omega$$

À partir de cette solution, donnez l'expression des coordonnées modales p_1 et p_2 .

 Solution

On obtient

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{I}{M\omega_{1d}} \left(H(t) e^{-\xi_1\omega_1 t} \sin(\omega_{1d} t) + H(t - t_0) e^{-\xi_1\omega_1(t-t_0)} \sin[\omega_{1d}(t - t_0)] \right) \\ \frac{3I}{M\omega_{2d}} \left(H(t) e^{-\xi_2\omega_2 t} \sin(\omega_{2d} t) - H(t - t_0) e^{-\xi_2\omega_2(t-t_0)} \sin[\omega_{2d}(t - t_0)] \right) \end{pmatrix},$$

avec $\omega_{i_d} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$ et $H(t)$ est la fonction de Heaviside.

...

Option de résolution: Transformée de Laplace

Donner l'expression des équations modales dans l'espace de Laplace. On suppose toutes les conditions initiales nulles, ce qui implique $\mathbf{p}(0) = 0$ et $\dot{\mathbf{p}}(0) = 0$.

Solution

Après passage dans l'espace de Laplace et l'application des conditions initiales, on a :

$$\begin{aligned} s^2 \tilde{p}_1 + 2\xi_1 \omega_1 s \tilde{p}_1 + \omega_1^2 \tilde{p}_1 &= \frac{I}{M} (1 + e^{-t_0 s}) \\ s^2 \tilde{p}_2 + 2\xi_2 \omega_2 s \tilde{p}_2 + \omega_2^2 \tilde{p}_2 &= \frac{3I}{M} (1 - e^{-t_0 s}) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(s) &= \frac{I}{M} \frac{1 + e^{-t_0 s}}{s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2} \\ \tilde{p}_2(s) &= \frac{3I}{M} \frac{1 - e^{-t_0 s}}{s^2 + 2\xi_2 \omega_2 s + \omega_2^2} \end{aligned}$$

En utilisant la transformée connue suivante:

$$\mathcal{L} \left\{ e^{-\xi \omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - \xi^2} t) \right\} = \frac{\omega \sqrt{1 - \xi^2}}{s^2 + 2\xi \omega s + \omega^2},$$

donner l'expression des coordonnées modales dans l'espace temporel (en fonction de t).

Solution

On obtient

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{I}{M \omega_{1_d}} \left(H(t) e^{-\xi_1 \omega_1 t} \sin(\omega_{1_d} t) + H(t - t_0) e^{-\xi_1 \omega_1 (t - t_0)} \sin[\omega_{1_d} (t - t_0)] \right) \\ \frac{3I}{M \omega_{2_d}} \left(H(t) e^{-\xi_2 \omega_2 t} \sin(\omega_{2_d} t) - H(t - t_0) e^{-\xi_2 \omega_2 (t - t_0)} \sin[\omega_{2_d} (t - t_0)] \right) \end{pmatrix},$$

avec $\omega_{i_d} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$ et $H(t)$ est la fonction de Heaviside.

Déduire de la question précédente le vecteur de coordonnées généralisées dans l'espace réel.

 Solution

Sachant que $\mathbf{z}(t) = \mathbf{X}\vec{p}(t)$, on a

$$\begin{pmatrix} z_A(t) \\ z_B(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(t) + p_2(t) \\ p_1(t) - p_2(t) \end{pmatrix}.$$

10 Microscope à force atomique

Un microscope à force atomique (*atomic force microscope* ou AFM) est un appareil servant à mesurer diverses propriétés physico-chimiques de surfaces (solides ou recouvertes d'un film). Son utilisation principale est la mesure de la rugosité de surfaces, mais il est également possible de mesurer le module d'Young d'un solide en divers points de sa surface. Cette technique demande d'étudier la dynamique vibratoire de l'AFM.

Le principe de fonctionnement d'un AFM est simple: il s'agit d'une poutre console (encastrée-libre) dotée à l'extrémité libre d'une pointe qui rentre en contact avec la surface solide. La rotation de la tête par rapport à la position horizontale est mesurée à l'aide d'un miroir posé au dessus de la tête qui dévie un laser. La position du laser dévié permet de déduire la rotation, et les caractéristiques de flexion de la poutre permettent de reconstruire le déplacement vertical de la tête et la force que subit celle-ci.

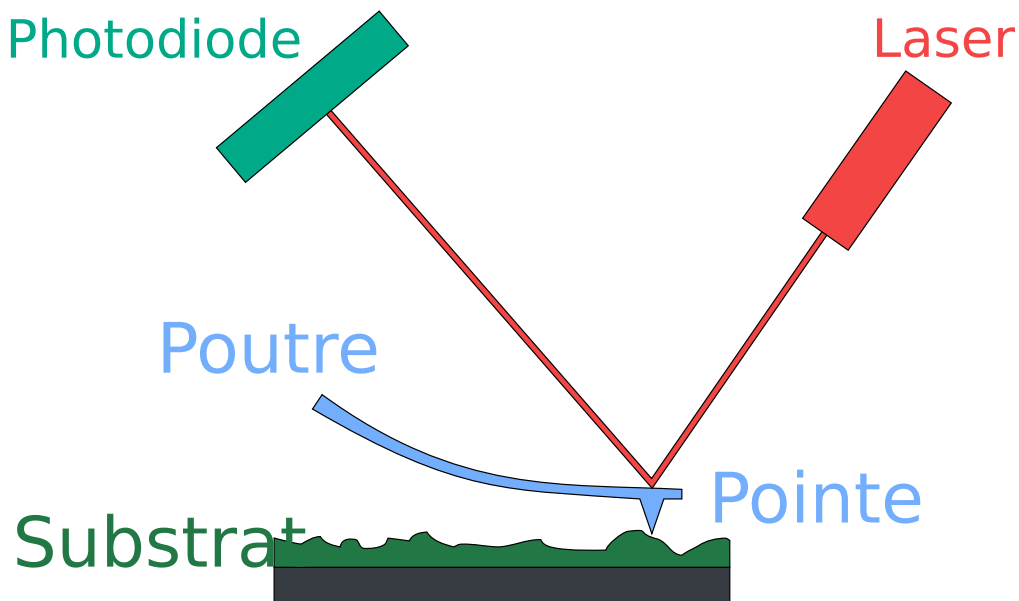


Figure 10.1: Fonctionnement d'un AFM. Modifié à partir du diagramme de la page [wikipedia](#)

Dans cet exercice, on va discrétiser la poutre en 4 segments rigides reliés entre eux par des ressorts de flexion de raideur K . L'inertie de la poutre est représentée par 3 masses m et une masse $10m$ en bout de poutre qui représente la pointe. Cette dernière est liée par un ressort k au substrat. La raideur de ce ressort est considérée comme une inconnue du système puisqu'elle dépend du module d'Young du solide que l'on cherche à mesurer.

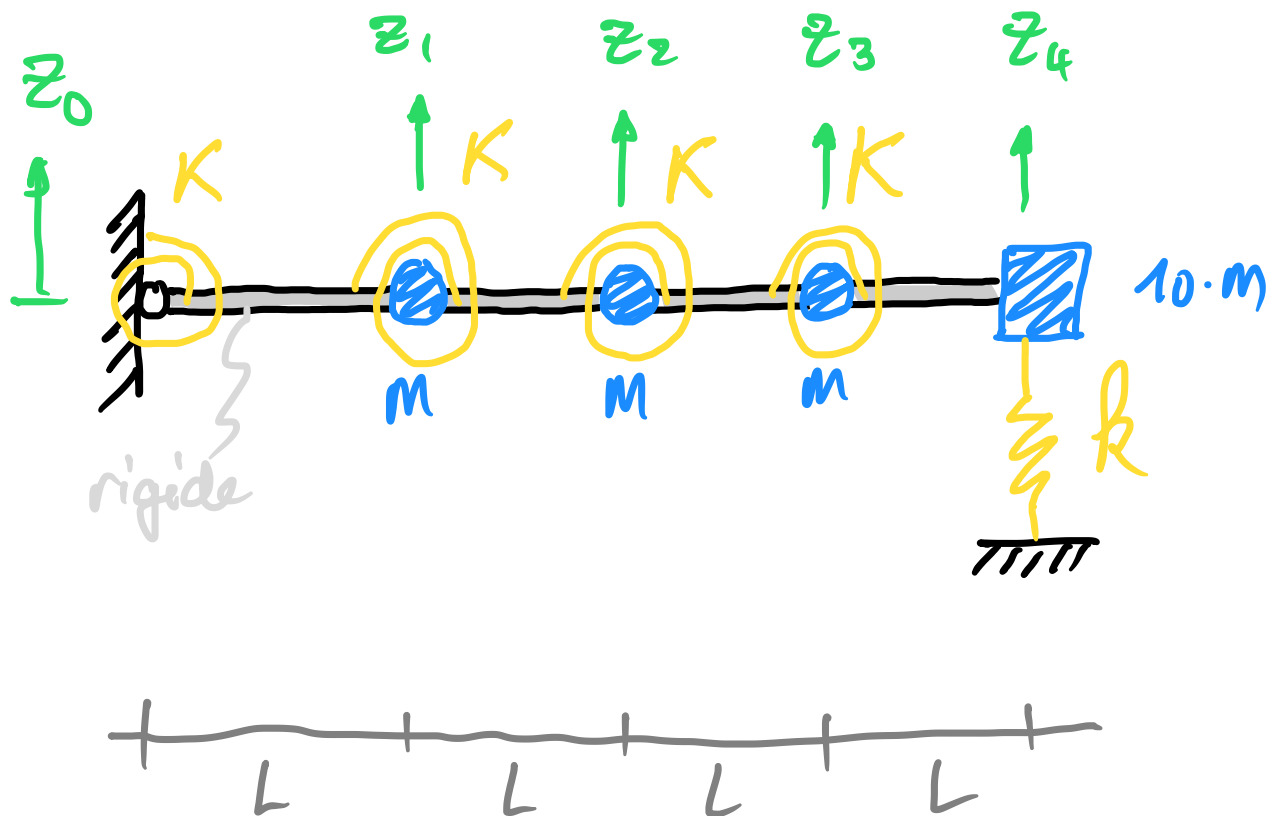


Figure 10.2: Schématisation d'un AFM discrétisé

La position verticale de chaque masse est notée z_i , $i = 1, \dots, 4$, et z_0 est la position verticale de l'encastrement, contrôlée par l'opérateur de la machine. Il est ainsi possible de mettre en vibration la poutre à une fréquence donnée ($z_0(t) = Z_0 \cos \Omega t$) et de mesurer la réponse dynamique. C'est le mécanisme dont on se servira pour trouver la valeur de k .

Puisqu'il est difficile de faire les calculs à la main avec 4 degrés de liberté, on utilise l'outil numérique. On se servira donc de Numpy pour le calcul matriciel et Scipy pour la diagonalisation et le calcul de matrices inverses. Les fonctions utiles à ce TD sont donc:

- $A @ B$ est le produit matriciel entre des matrices A ($n \times k$) et B ($k \times m$). Le symbole $@$ fonctionne aussi pour les produits matrice-vecteur
- $A.T$ est la transposée de A
- `scipy.linalg.eigh(A, B)` retourne les valeurs propres λ_n et la matrice des vecteurs propres (en colonnes) X pour le problème de valeurs propres généralisé $A X_n = \lambda_n B X_n$. Les valeurs propres sont dans l'ordre croissant
- `scipy.linalg.inv(A)` retourne la matrice inverse de A (si elle est inversible)
- `numpy.array([...])` permet de construire une matrice avec les valeurs désirées
- `numpy.eye(n)` retourne la matrice identité $n \times n$
- `numpy.zeros((n, n))` retourne une matrice $n \times n$ remplie de zéros
- `numpy.diag(v)` crée une matrice diagonale avec les valeurs de v (sur la diagonale), si v est un tableau à une dimension

⚠ Notebook live

Pour faire l'exercice, vous devez vous rendre [ici](#), depuis n'importe quel navigateur web, il n'y a pas besoin d'installer Python.
Il sera peut-être nécessaire d'aller dans le menu Help > Clear Browser Data pour recharger les notebooks.

10.1 Dynamique et modes propres

On commence par poser les équations de la dynamique du système discret.

Montrer que l'énergie cinétique et la matrice d'inertie sont respectivement:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2 + 10\dot{z}_4^2), \quad \mathbf{M} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse des petits angles, montrer que l'énergie potentielle et la matrice de raideur sont respectivement:

$$U = \frac{1}{2} \frac{K}{L^2} ((z_1 - z_0)^2 + (z_2 - 2z_1 + z_0)^2 + (z_3 - 2z_2 + z_1)^2 + (z_4 - 2z_3 + z_2)^2) + \frac{1}{2}kz_4^2,$$
$$\mathbf{K} = \frac{K}{L^2} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 + \frac{kL^2}{K} \end{pmatrix}$$

i Note

Le ressort de rotation entre les segments de poutres $(i-1, i)$ et $(i, i+1)$ ne se déforme que quand les rotations des deux segments sont différentes, soit:

$$U_i = \frac{1}{2}K\Delta\theta_i^2 = \frac{1}{2}K(\theta_{i+1} - \theta_i)^2$$

Où θ_i est l'angle que fait le segment $(i-1, i)$ avec l'horizontale (respectivement θ_{i+1} pour le segment $(i, i+1)$), qu'il faut exprimer en fonction des positions z_i et z_{i-1} (respectivement z_{i+1} et z_i).

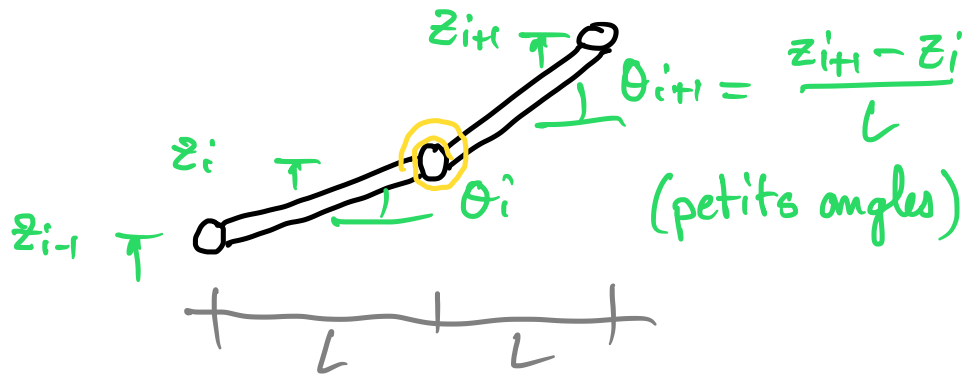


Figure 10.3: Cinématique d'une rotule

À partir de l'équation d'Euler-Lagrange, déduire que le vecteur des efforts généralisés s'écrit :

$$\vec{Q}(t) = \frac{K}{L^2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} z_0(t)$$

On importe les paquets nécessaire à la suite de l'exercice.

```
import numpy as np
import scipy as sc
import matplotlib.pyplot as plt
```

Implémenter les fonctions deux fonctions suivantes (vous pourrez vous aider des fonctions `np.array` et `np.eye`):

```
def mass_matrix(m):
    """Retourne la matrice de masse en fonction de m"""

    return ...

def stiffness_matrix(K, L, k):
    """Retourne la matrice de raideur en fonction de K, L et k"""

    return ...
```

Implémenter la fonction suivante à l'aide de `sc.linalg.eigh`:

```
def diagonalize(K_mat, M_mat):
    """Retourne les pulsation propres et la matrice des modes propres"""

    return ..., ...
```

Avec les valeurs de K , L , k et m ci-dessous, appelez les fonctions que vous avez implémentées pour calculer les pulsations propres et les modes propres. Vérifiez que les égalités suivantes sont vraies (à la précision machine) :

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} = \text{diag}(\{\omega_i^2\}), \quad \text{où} \quad \text{diag}(\{v_i\}) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_4 \end{pmatrix}$$

```
K = 1.
L = 1.
k = 0.
m = 1.
```

i Note

On peut visuellement comparer les valeurs pour s'assurer de l'égalité, ou utiliser la fonction `np.testing.assert_almost_equal(A, B)` pour tester l'égalité entre les matrices A et B.

À l'aide de la méthode de Rayleigh, vérifiez la première pulsation propre.

Affichez sur un graphe la déformée des 4 modes.

10.2 Influence du substrat

10.2.1 Dimension des quantités

Dans les questions ci-dessus, on a supposé que $k = 0$. En regardant l'expression de la matrice de raideur, l'effet de k dans cette dernière est donné par un nombre sans dimension kL^2/K .

De même, on remarque en posant l'équation de la dynamique que $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{L^2 m}}$ est l'unité naturelle des pulsations. Choisir $K = 1$, $L = 1$ et $m = 1$ revient à résoudre le problème adimensionné, et la valeur choisie de k est le nombre sans dimension kL^2/K .

10.2.2 Effet de k sur les fréquences des modes

On cherche à quantifier l'influence du substrat sur les fréquences de vibration des deux premiers modes. Pour cela, on a besoin d'une fonction qui, pour une valeur de k , nous donne la fréquence propre du mode désiré.

```

@np.vectorize
def mode_freq(k, mode_number):
    """
    Retourne la fréquence d'oscillation du mode `mode_number`
    pour une raideur `k` du substrat
    """
    K_mat = ... # en fonction de k (K = L = 1)
    M_mat = ...
    ...
    return ...

```

Pour des valeurs de kL^2/K de 0 à 20 (`np.linspace`), affichez sur un graphe les fréquences des deux premiers modes (à l'aide de la fonction ci-dessus). Sur quelle plage de valeur les modes sont-ils sensibles à une variation de k ?

10.3 Réponse libre

Exprimer les coordonnées modales $p_i(t)$ solutions des équations modales:

$$\ddot{p}_i + \omega_i^2 p_i = 0$$

Déterminez les constantes inconnues à partir des conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{z}(0) = 0, \quad \dot{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{v} = -10^{-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer z_i en fonction du temps sur deux périodes du mode 1.

```

def displacement(t, X, omega, B):
    """Retourne un tableau (t.size * 4) contenant les valeurs de z_i en fonction de t"""
    # Étape 1. Calculer les coordonnées modales p(t)
    # Étape 2. Repasser dans la bases des degrés de liberté z(t)
    return ...

```

Calculer et afficher l'angle θ_4 (l'angle du miroir réfléchissant le laser) en fonction du temps.

Bonus traitement de signal : afficher le spectre du signal ci-dessus. Vérifiez que les fréquences dominantes sont bien les fréquences propres des 4 modes.

10.4 Réponse forcée

On reprend le vecteur des efforts généralisés:

$$\mathbf{Q}(t) = \frac{K}{L^2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} z_0(t) = \mathbf{E} z_0(t)$$

Pour un mouvement harmonique de fréquence Ω ($z_0(t) = Z_0 \cos(\Omega t)$), calculez l'amplitude de la réponse forcée des coordonnées modales.

```
E = K / L**2 * np.array([3, -1, 0, 0])

def forced_response_modal(Omega, Z0, E, omega, X):
    """Retourne l'amplitude de la réponse forcée pour les modes"""
    return ...
```

On repasse ensuite dans la base des degrés de liberté, calculez l'amplitude de la réponse forcée pour les z_i .

```
def forced_response_displacement(Omega, Z0, E, omega, X):
    """Retourne l'amplitude de la réponse forcée pour les z_i"""
    # Il faut appeler la fonction ci-dessus !
    return ...
```

À l'aide des fonctions ci-dessus, calculez la fonction de transfert de θ_4 en fonction de k et de Ω .

```
@np.vectorize
def transfer_theta_4(Omega, k, E):
    """Pour une valeur de  $\Omega$  et de  $k$ , calcule l'amplitude d'oscillation de la rotation du miroir
    omega, X = ... # en fonction de k
    Z = ...
    theta_4 = ...
    return theta_4
```

Pour les valeurs de Ω et k ci-dessous, affichez la fonction de transfert de θ_4 .

```
Omega_values = np.geomspace(1e-2, 1e1, 300)
k_values = [0, 0.05, 5, 10]
```

💡 Solution du TD

Chaque masse a un seul degré de liberté de translation, l'énergie cinétique est triviale et $M_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{z}_i \partial \dot{z}_j}$.

L'énergie des ressorts 1, 2, 3 peut être écrite avec la formule ci-dessus, il faut juste exprimer l'angle θ_i dans l'hypothèse des petits angles:

$$\theta_i = \frac{z_i - z_{i-1}}{L}, \quad \text{et} \quad \theta_{i+1} - \theta_i = \frac{1}{L}(z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1})$$

L'énergie potentielle du ressort 0 (celui de l'encastrement) dépend uniquement de l'angle θ_1 , et l'énergie du ressort du substrat dépend uniquement de z_4 , on a donc:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}K(\theta_1^2 + (\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2 + (\theta_4 - \theta_3)^2) + \frac{1}{2}kz_4^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{K}{L^2}((z_1 - z_0)^2 + (z_2 - 2z_1 + z_0)^2 + (z_3 - 2z_2 + z_1)^2 + (z_4 - 2z_3 + z_2)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}kz_4^2 \end{aligned}$$

Attention, z_0 n'est pas un degré de liberté et n'intervient pas dans le calcul de $\mathbf{K}$, que l'on détermine par dérivée:

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial z_i \partial z_j}.$$

On pourra vérifier que tous les termes diagonaux de $\mathbf{K}$ sont positifs et que $\mathbf{K}$ est symétrique. Si ce n'est pas le cas il y a une erreur de calcul.

En calculant la première dérivée de U , on fait apparaître des termes en z_0 . En isolant ces termes dans l'équation de la dynamique $\mathbf{M}\ddot{\vec{z}} + \mathbf{K}\vec{z} = \vec{Q}(t)$ on peut identifier $\vec{Q}$. La procédure est identique à l'exercice du salaire de la peur.

```

def mass_matrix(m):
    """Retourne la matrice de masse en fonction de m"""
    M_mat = m * np.eye(4)
    M_mat[3, 3] *= 10
    return M_mat

def stiffness_matrix(K, L, k):
    """Retourne la matrice de raideur en fonction de K, L et k"""
    K_mat = K/L**2 * np.array([
        [6, -4, 1, 0],
        [-4, 6, -4, 1],
        [1, -4, 5, -2],
        [0, 1, -2, 1 + k * L**2 / K],
    ])

    return K_mat

def diagonalize(K_mat, M_mat):
    """Retourne les pulsation propres et la matrice des modes propres"""
    omega2, X = sc.linalg.eigh(K_mat, M_mat)
    return np.sqrt(omega2), X

K_mat = stiffness_matrix(K, L, k)
M_mat = mass_matrix(m)

omega, X = diagonalize(K_mat, M_mat)

np.testing.assert_almost_equal(X.T @ M_mat @ X, np.eye(4))
np.testing.assert_almost_equal(X.T @ K_mat @ X, np.diag(omega**2))
# S'il n'y a pas d'erreur alors tout va bien :)

```

Pour utiliser le quotient de Rayleigh, il faut la déformation statique de la structure due à une distribution de forces proportionnelles aux masses.

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite la solution de $\mathbf{K}\mathbf{z}_{\text{stat}} = \mathbf{f}$, et on applique le quotient de Rayleigh:

$$\omega_R^2 = \frac{\langle \mathbf{z}_{\text{stat}}, \mathbf{K}\mathbf{z}_{\text{stat}} \rangle}{\langle \mathbf{z}_{\text{stat}}, \mathbf{M}\mathbf{z}_{\text{stat}} \rangle}$$

```

f = np.array([1, 1, 1, 10])
z_stat = sc.linalg.solve(K_mat, f)

omega_R = np.sqrt(
    np.dot(z_stat, K_mat @ z_stat)
    / np.dot(z_stat, M_mat @ z_stat)
)

print(f"""Rayleigh:  = {omega_R:.3e}
Exact:      = {omega[0]:.3e}
Erreur:     {np.abs(omega_R - omega[0])/omega[0]*100:.3f}%""")

Rayleigh:  = 5.609e-02
Exact:     = 5.608e-02
Erreur:    0.023%

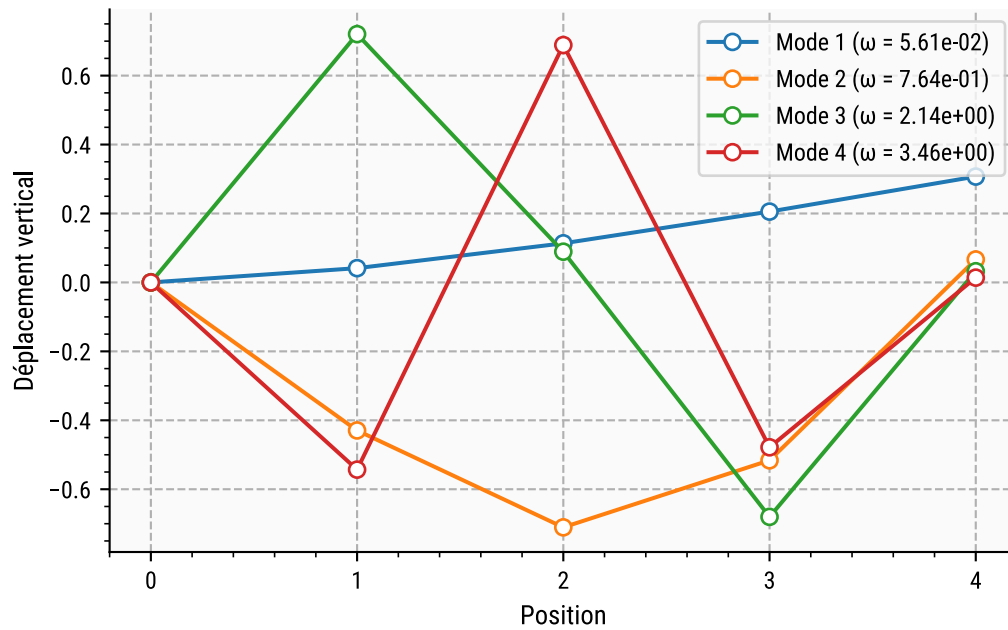
fig, ax = plt.subplots()

position = np.arange(5) # entiers de 0 à 4

for mode_num, ( , x) in enumerate(zip(omega, X.T)):
    x = np.concatenate([[0], x]) # on rajoute z_0 = 0 pour l'encastrement
    ax.plot(position, x,
            marker='o', markerfacecolor='w',
            label=f'Mode {mode_num+1} ( = {:.2e})')

ax.set(xticks=position, xlabel='Position', ylabel='Déplacement vertical')
ax.grid()
ax.legend()
plt.show()

```



On remarque que les modes 2, 3, 4 ne font presque pas osciller la pointe de l'AFM comparé au mode fondamental.

```
@np.vectorize
def mode_freq(k, mode_number):
    """
    Retourne la fréquence d'oscillation du mode `mode_number`
    pour une raideur `k` du substrat
    """
    K_mat = stiffness_matrix(1, 1, k)
    M_mat = mass_matrix(1)
    omega, _ = diagonalize(K_mat, M_mat)
    return omega[mode_number] / (2 * np.pi)
```

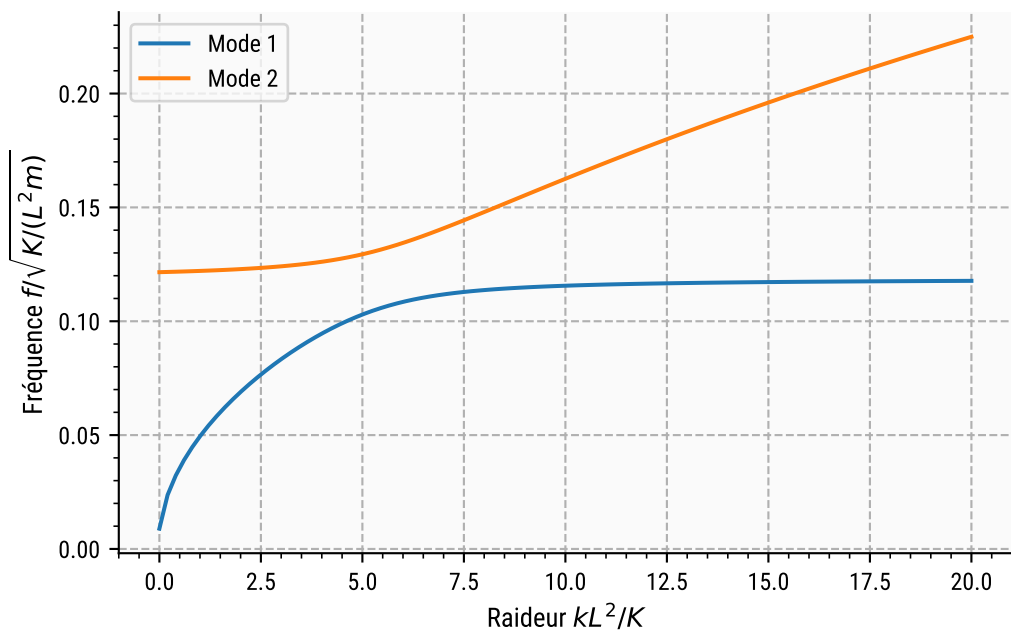
```

fig, ax = plt.subplots()

k_vals = np.linspace(0, 20, 100)
fregs_1 = mode_freq(k_vals, 0)
fregs_2 = mode_freq(k_vals, 1)

ax.plot(k_vals, fregs_1, label='Mode 1')
ax.plot(k_vals, fregs_2, label='Mode 2')
ax.grid()
ax.set(xlabel='Raideur $k L^2 / K$',
      ylabel='Fréquence $f / \sqrt{K/(L^2m)}$')
ax.legend()
plt.show()

```



Le mode 1 est le plus sensible entre les valeurs de 0 et 5, au-delà une variation de k n'affecte pas la fréquence. Inversement, le mode 2 est relativement insensible aux faibles valeurs de k , et la fréquence est affectée au-delà de 5. Le dispositif est donc efficace pour mesurer des valeurs de kL^2/K entre 0 et 20 (au moins).

$$p_i(t) = A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)$$

On a d'abord

$$\mathbf{z}(0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X}\mathbf{p}(0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p}(0) = 0 \Leftrightarrow A_i = 0 \forall i$$

Puis

$$\dot{\mathbf{z}}(0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X}\dot{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{v} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{v}$$

Puisque $A_i = 0$, on peut exprimer $\mathbf{p}(0) = \text{diag}(\{\omega_i\})\mathbf{B}$, on obtient ainsi:

$$\mathbf{B} = \text{diag}(\{1/\omega_i\})\mathbf{X}^{-1}\mathbf{v}$$

```
v = -1e-2 * np.array([1., 1., 1., 1.])
B = np.diag(1 / omega) @ sc.linalg.inv(X) @ v

def displacement(t, X, omega, B):
    """Retourne un tableau (t.size * 4) contenant les valeurs de z_i en fonction de t"""

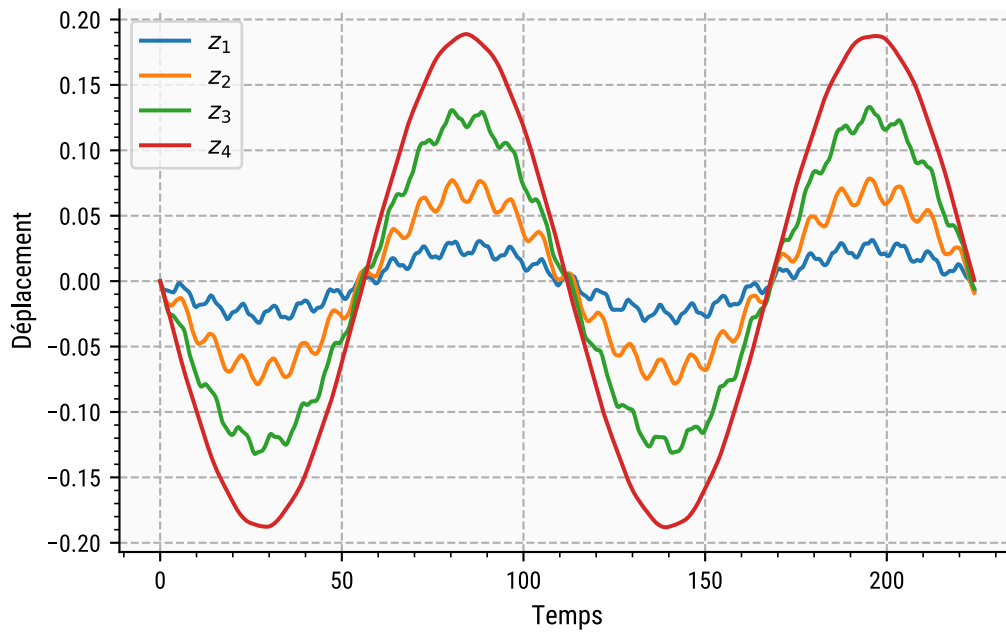
    # lignes = temps, colonnes = mode
    coord_modales = np.zeros([t.size, omega.size])
    for i in range(omega.size):
        # on selectionne la "i"-eme colonne du tableau de p(t)
        coord_modales[:, i] = B[i] * np.sin(omega[i] * t)

    z = np.zeros_like(coord_modales)
    for i in range(t.size):
        # on repasse dans la base des DDL pour chaque temps
        z[i, :] = X @ coord_modales[i, :]
    return z

tmax = 2 * 2 * np.pi / omega[0]
Ns = 500
t = np.linspace(0, tmax, Ns)

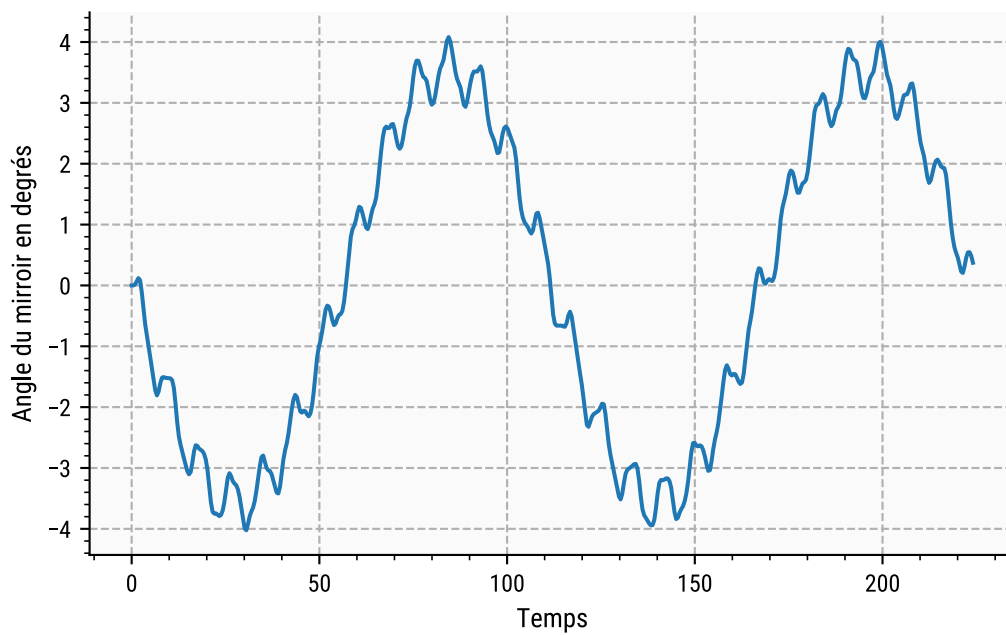
Z = displacement(t, X, omega, B)

for i, z in enumerate(Z.T):
    plt.plot(t, z, label=f'$z_{i+1}$')
plt.grid()
plt.gca().set(xlabel='Temps', ylabel='Déplacement')
plt.legend()
plt.show()
```

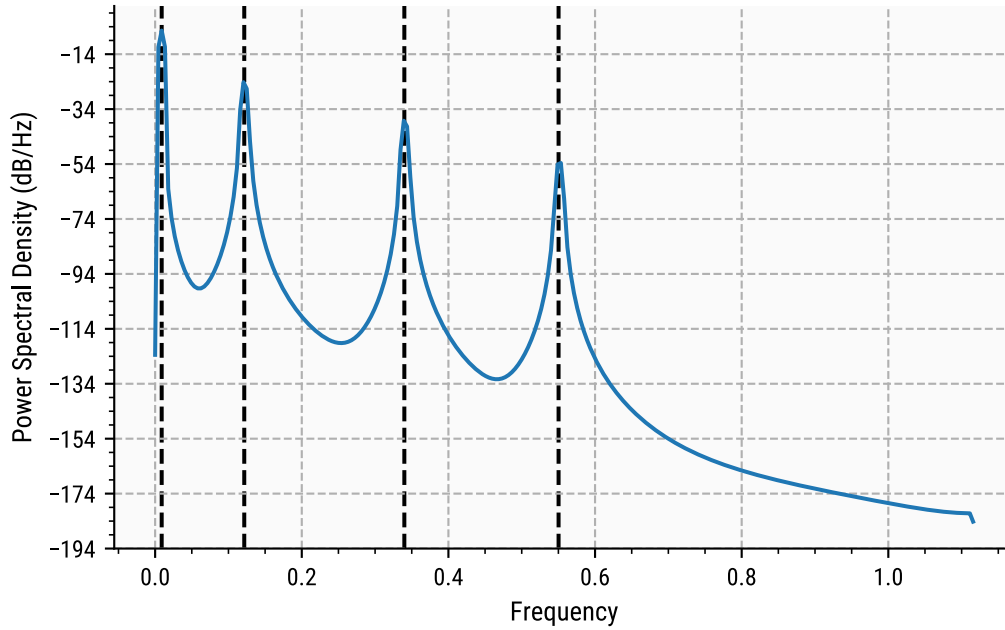


On a $\theta_4 = \frac{z_4 - z_3}{L}$.

```
mirror_angle = (Z[:, 3] - Z[:, 2]) / L
plt.plot(t, mirror_angle * 360 / (2 * np.pi))
plt.grid()
plt.gca().set(xlabel='Temps', ylabel='Angle du miroir en degrés')
plt.show()
```



```
plt.psd(mirror_angle, Fs=Ns/tmax, NFFT=Ns)
for  in omega:
    plt.axvline( / (2 * np.pi), color='k', ls='--', zorder=-1)
plt.show()
```



On doit effectuer un changement de base de l'équation de la dynamique pour calculer une solution particulière dans la base des coordonnées modales:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{X}^T \mathbf{Q}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\mathbf{p}} + \text{diag}(\{\omega_i^2\}) \mathbf{p} = \mathbf{X}^T \mathbf{Q}$$

Puisque $z_0(t) = Z_0 \cos(\Omega t)$, on cherche des solutions de la forme $p_i(t) = P_i \cos(\Omega t)$. En remplaçant dans l'équation ci-dessus, on obtient:

$$-\Omega^2 \mathbf{P} \cos(\Omega t) + \text{diag}(\{\omega_i^2\}) \mathbf{P} \cos(\Omega t) = \mathbf{X}^T \mathbf{E} Z_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow (\text{diag}(\{\omega_i^2\}) - \Omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{P} = \mathbf{X}^T \mathbf{E} Z_0$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} = (\text{diag}(\{\omega_i^2\}) - \Omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{E} Z_0$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} = \text{diag} \left(\left\{ \frac{1}{\omega_i^2 - \Omega^2} \right\} \right) \mathbf{X}^T \mathbf{E} Z_0$$

```
def forced_response_modal(Omega, Z0, E, omega, X):
    """Retourne l'amplitude de la réponse forcée pour les modes"""
    Q_modal = X.T @ E * Z0
    amplitude_modal = np.zeros(omega.size)
    for i in range(omega.size):
        amplitude_modal[i] = Q_modal[i] / (omega[i]**2 - Omega**2)
    return amplitude_modal
```

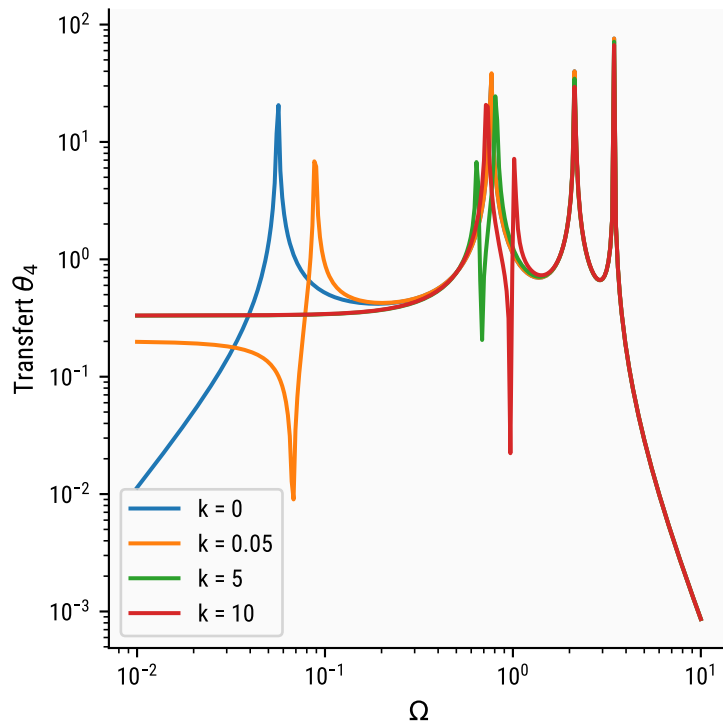
L'amplitude s'exprime $Z = XP$.

```
def forced_response_displacement(Omega, Z0, E, omega, X):
    p = forced_response_modal(Omega, Z0, E, omega, X)
    return X @ p
```

```
@np.vectorize
def transfer_theta_4(Omega, k):
    """Pour une valeur de  $\Omega$  et de  $k$ , calcule l'amplitude d'oscillation de la rotation du mirr
    omega, X = diagonalize(stiffness_matrix(1, 1, k), mass_matrix(1))
    Z = forced_response_displacement(Omega, 1, E, omega, X)
    theta_4 = np.abs(Z[3] - Z[2]) / L
    return theta_4
```

```
for k in k_values:
    T = transfer_theta_4(Omega_values, k)
    plt.loglog(Omega_values, T, label=f'k = {k}')

plt.gca().set(xlabel='$\\Omega$', ylabel='Transfert $\\theta_4$')
plt.legend()
plt.gcf().set_size_inches(4, 4)
plt.show()
```

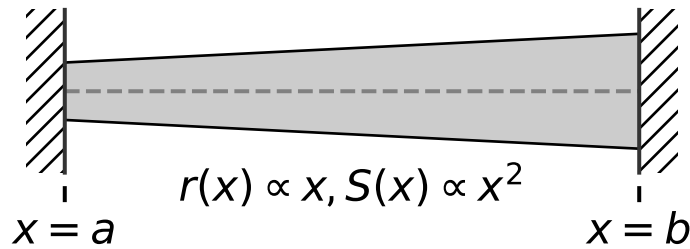


On remarque que les fréquences des résonances des modes 3 et 4 ne sont pas affectées par la valeur de k , il faut donc observer les pics de résonance des deux premiers modes.

On remarque aussi une fréquence caractéristique d'excitation pour laquelle le miroir ne vibre pas. Pour les faibles valeurs de k cette fréquence est plus petite que la première résonance. En augmentant k elle finit par dépasser la première résonance.

11 Vibrations longitudinales dans une poutre de section variable

On étudie les vibrations longitudinales d'une poutre à section variable, comme montrée sur la figure ci-dessous.



11.1 Dynamique vibratoire

1. Écrire dans ce cas l'équilibre dynamique d'une section d'une poutre dans un mouvement longitudinal.
2. En déduire les équations des ondes de vibration longitudinales d'une poutre de longueur $L = b - a$, de section droite d'aire $S(x)$, faite dans un matériau homogène et isotrope de masse volumique ρ et de module d'Young E .
3. Que devient cette équation si la section est du type $S(x) = S_0 x^2$? Montrer qu'elle est équivalente à l'équation :

$$\rho S_0 \frac{\partial^2(xu)}{\partial t^2} - E S_0 \frac{\partial^2(xu)}{\partial x^2} = \frac{f}{x}$$

11.2 Vibration libre

4. Trouver la solution générale de l'équation pour $f = 0$.
5. Dans le cas où la poutre est encastree à ses deux extrémités $x = a$ et $x = b$, montrer que le déplacement a pour expression

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(t) \chi_m(x) \quad \text{avec} \quad \chi_m(x) = \frac{X_m(x)}{x} = N_m \frac{\sin[\gamma_m(x - a)]}{x}.$$

6. On souhaite normaliser les modes χ_m pour que :

$$\langle \chi_m, \rho S \chi_m \rangle = \int_a^b \rho S(x) \chi_m(x)^2 dx = \rho S_0,$$

Calculer le coefficient N_m approprié.

11.3 Réponse forcée

7. Déterminer la réponse de la poutre à une vibration longitudinale sinusoïdale du support :

$$u_s(t) = u_0 \sin(\Omega t).$$

💡 Solution

11.3.0.1 Équation du mouvement

On écrit l'équilibre dynamique d'une section de longueur dx :

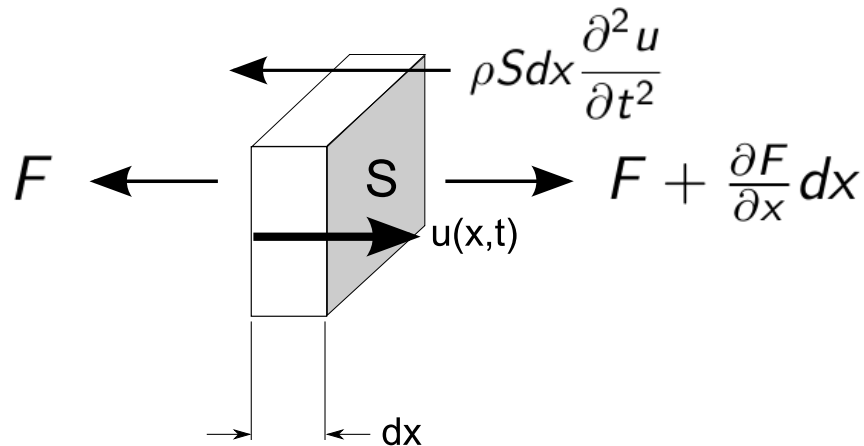


Figure 11.1: Forces longitudinales sur une tranche de barre.

- Masse: $\rho S dx$ avec S variable ($S = S(x)$)
- Déplacement : $u(x, t)$
- Accélération : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
- Force à gauche : $-F(x, t)$
- Force à droite : $F(x, t) + \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx$

- Force extérieure $f(x, t)dx$

On a donc

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F + F + \frac{\partial F}{\partial x} dx + f(x, t) dx$$

L'effort normal $F(x)$ s'exprime à partir du déplacement comme :

$$F(x) = \sigma S = E \varepsilon S = ES \frac{\partial u}{\partial x}.$$

L'équilibre dynamique s'écrit alors :

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(ES(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f.$$

11.3.0.2 Réduction à l'équation de d'Alembert

Si la section est telle que $S(x) = S_0 x^2$, alors l'équation du mouvement devient :

$$-\frac{dS(x)}{dx} E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - S(x) E \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \rho S(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = f$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{dS(x)}{dx} &= 2S_0 x \\ -2ES_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - ES_0 x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \rho S_0 x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{f}{x}. \end{aligned}$$

On remarque que :

$$2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 [xu(x, t)]}{\partial x^2}$$

En utilisant cette identité, on peut écrire :

$$\rho S_0 \frac{\partial^2 (xu)}{\partial t^2} - ES_0 \frac{\partial^2 (xu)}{\partial x^2} = \frac{f}{x}$$

11.3.0.3 Solution modale

La fonction $v(x, t) = xu(x, t)$ est solution de l'équation de d'Alembert et peut être mise sous la forme $v(x, t) = X(x)p(t)$.

On identifie les deux applications linéaires M et K :

$$\begin{aligned} M(\ddot{v}) &= \rho S_0 \ddot{v} \\ K(v) &= -ES_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

On peut donc écrire l'équation du mouvement libre comme $M(\ddot{v}) + K(v) = 0$. Pour que $v(x, t) = X(x)p(t)$ soit solution, il faut que :

$$\begin{cases} \ddot{p} + \omega^2 p = 0 \\ K(X) = \omega^2 M(X) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{p} + \omega^2 p = 0 \\ X'' + \omega^2 \frac{\rho}{E} X = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \\ X(x) = C \cos(\gamma x) + D \sin(\gamma x). \end{cases}$$

avec $\gamma = \omega/c_L$ et $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Le déplacement $u(x, t)$ a donc pour expression

$$u(x, t) = \frac{v(x, t)}{x} = \left[\frac{C}{x} \cos(\gamma x) + \frac{D}{x} \sin(\gamma x) \right] [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)].$$

11.3.0.4 Normalisation des modes

On a pour tout mode m :

$$\begin{aligned} 1 &= N_m^2 \int_a^b x^2 \chi_m^2(x) dx = N_m^2 \int_a^b \sin^2[\gamma_m(x-a)] dx \\ &= \frac{N_m^2}{2} \int_a^b [1 - \cos(2\gamma_m(x-a))] dx = \frac{N_m^2}{2} L. \end{aligned}$$

On en déduit que le coefficient de normalisation a pour expression

$$N_m = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Résolution pour $a=0$ et $b=L$:

$$1 = N_m^2 \int_0^L x^2 \chi_m^2(x) dx = N_m^2 \int_0^L \sin^2[\gamma_m x] dx = \frac{N_m^2}{2} \int_0^L [1 - \cos(2\gamma_m x)] dx = \frac{N_m^2}{2} L.$$

On en déduit que le coefficient de normalisation a pour expression

$$N_m = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

11.3.0.5 Réponse forcée

Le déplacement du support est traité comme dans l'exercice 6 (le salaire de la peur) : on considère que le déplacement longitudinal $u(x, t)$ est exprimé dans le référentiel non-inertiel du support. Il y a donc une composition de vitesse à prendre en compte dans l'énergie cinétique, et l'énergie potentielle est inchangée :

$$T(\dot{u}) = \frac{1}{2} \langle \dot{u} + \dot{u}_s, M_u(\dot{u} + \dot{u}_s) \rangle, \quad U(u) = \frac{1}{2} \langle u, K_u(u) \rangle$$

En appliquant l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient l'équation du mouvement forcé :

$$\begin{aligned} M_u(\ddot{u}) + K_u(u) &= -M_u(\ddot{u}_s) \\ \Leftrightarrow \rho S(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(ES(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \rho S(x) \Omega^2 u_0 \sin \Omega t \end{aligned}$$

On opère le changement de variable $v(x, t) = xu(x, t)$ et on obtient l'équation :

$$\begin{aligned} \rho S_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - ES_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \rho S_0 x \Omega^2 u_0 \sin \Omega t \\ \Leftrightarrow M(\ddot{v}) + K(v) &= Q(x, t) \end{aligned}$$

On cherche une solution particulière de la forme $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) q_n(t)$. En utilisant l'orthogonalité des modes et $\tilde{m}_n = \langle X_n, M(X_n) \rangle = \rho S_0$, on a :

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{\langle X_n, Q \rangle}{\tilde{m}_n} = u_0 \Omega^2 \sin \Omega t \int_a^b X_n(x) x \, dx.$$

On doit donc calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_a^b X_n(x) x \, dx &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_a^b x \sin(\gamma_n(x-a)) \, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{\gamma_n} \left\{ [-x \cos(\gamma_n(x-a))]_a^b + \int_a^b \cos(\gamma_n(x-a)) \, dx \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{\gamma_n} \left\{ -(b \cos \gamma_n L - a) + \frac{1}{\gamma_n} [\sin(\gamma_n(x-a))]_a^b \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{a - b(-1)^n}{\gamma_n} \end{aligned}$$

L'équation du mouvement forcé pour les coordonnées modales q_n est donc :

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{a - b(-1)^n}{\gamma_n} u_0 \Omega^2 \sin \Omega t.$$

La solution particulière est donc :

$$q_n(t) = u_0 \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{a - b(-1)^n}{\gamma_n} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \sin \Omega t,$$

et on obtient la solution générale (en remplaçant $u = \frac{v}{x}$):

$$u(x, t) = u_0 \sin \Omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a - b(-1)^n}{\gamma_n L} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \frac{\sin(\gamma_n(x - a))}{x}.$$

12 Modélisation des vibrations transverses d'un rail



Figure 12.1: TGV

L'objet du problème est de modéliser analytiquement les vibrations transverse induite dans un rail par le passage d'un train. On modélise le rail par une poutre droite de longueur L , de section rectangulaire S , de moment quadratique I . Elle est faite dans un matériau homogène de masse volumique ρ et de module d'Young E . Le rail repose sur deux appuis simples en $x = 0$ et $x = L$. Le ballast et les traverses, jouant le rôle d'une fondation élastique, sont représentés par une raideur k par unité de longueur. L'ensemble est représenté sur la figure suivante.

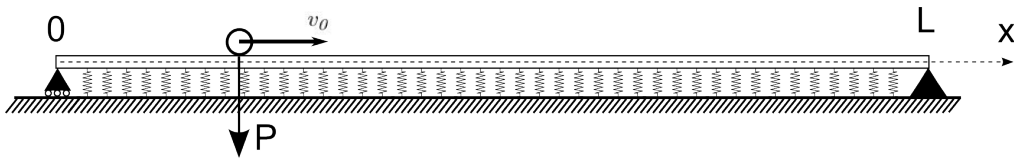


Figure 12.2: Modèle de rail sur une suspension élastique

Pour une section droite de la poutre à l'abscisse x , on note $v(x, t)$ le déplacement vertical ($\parallel z$) du centre d'inertie et $\theta(x, t)$ la rotation de cette section par rapport à l'axe transversal ($\parallel y$). Les dimensions de la section droite étant faibles devant la longueur de la poutre, le modèle d'Euler-Bernoulli est suffisant pour en décrire correctement le comportement en flexion.

1. Faire le bilan dynamique d'une section droite de la poutre dans le mouvement de flexion, en incluant l'effort de la fondation élastique.

12.1 Mouvement libre

2. En l'absence de force d'excitation, montrer que l'équation différentielle qui décrit les vibrations de flexion s'écrit sur $v(x, t)$:

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + kv = 0$$

3. On note $c = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$. Dans le cas d'une onde stationnaire, quelle type de solution cherche-t-on pour $v(x, t)$?
4. Isoler les équations différentielles sur la forme des modes $X(x)$ et l'oscillation temporelle $p(t)$.
5. Donner la forme générale de $X(x)$ et $p(t)$. On explicitera le nombre d'onde en fonction de $C = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$ et $\frac{k}{EI}$.
6. Décrire les conditions mécaniques aux limites du rail et donner les conditions limites sur $X(x)$ associées
7. En déduire les nombres d'ondes admissibles γ_n
8. Rappeler la relation d'orthogonalité et en déduire le coefficient de normalisation des fonctions propres pour que $\langle X_n, M(X_n) \rangle = \rho S$ (équivalent à $\langle X_n, X_n \rangle = 1$).
9. Représenter schématiquement la forme des 3 premiers modes.
10. Donner l'expression des fréquences propres ω_n associées à ces fonctions propres. Comparer ces fréquences à celles du rail sans ballast. Commenter.
11. Écrire l'expression de la réponse libre $v(x, t)$ du rail en fonction des X_n et ω_n .
12. Indiquer comment les inconnues restantes peuvent être déterminées.

12.2 Méthode de Rayleigh pour le mode fondamental

On cherche à vérifier l'expression de la pulsation propre du mode fondamental:

$$\omega_1 = \frac{c}{L^2} \sqrt{\pi^4 + \frac{kL^4}{EI}} \quad (12.1)$$

Pour cela, on va chercher une solution de l'équation de flexion statique:

$$EI \frac{d^4 v_{\text{sta}}}{dx^4} = -\rho S g$$

i Note

Pour la déformée statique, on néglige l'effet du ballast, ce qui simplifie considérablement l'équation différentielle à résoudre.

13. Par intégration successive, trouver le déplacement statique $v_{\text{sta}}(x)$. On utilisera les conditions limites de moment nul et de déplacement vertical nul pour déterminer les constantes d'intégration.

14. Montrer que $v_{\text{sta}}(x)$ est proportionnel à la fonction:

$$\phi\left(\frac{x}{L}\right) = \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)$$

15. Calculer :

$$U(\phi) = \frac{1}{2}\langle\phi, K(\phi)\rangle$$
$$T(\phi) = \frac{1}{2}\langle\phi, M(\phi)\rangle$$

On se servira des identités suivantes:

$$\frac{d}{dx}\phi\left(\frac{x}{L}\right) = \frac{1}{L}\phi'\left(\frac{x}{L}\right)$$
$$\int_0^1 [\phi(z)]^2 dz = \frac{31}{2520}$$
$$\int_0^1 [\phi''(z)]^2 dz = \frac{6}{5}$$

16. À l'aide du quotient de Rayleigh, estimer la fréquence fondamentale de vibration du rail. Est-ce que cette estimation correspond au calcul précédent (Équation 12.1) ?

12.3 Réponse au passage du train

On s'intéresse maintenant à la réponse du rail au passage du train. De manière très simplifiée, le train est modélisé par une charge mobile $P(x, t)$ qui se déplace à la vitesse constante v_0 (voir Figure 12.1).

On utilise la distribution de Dirac pour exprimer l'excitation résultante. L'équation différentielle du mouvement du rail sous l'effet de cette excitation s'écrit :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + kv = P_0 \delta(x - v_0 t)$$

On rappelle la définition des masses modales et raideur modales:

$$\tilde{m}_n = \langle X_n, M(X_n) \rangle, \text{ et } \tilde{k}_n = \langle X_n, K(X_n) \rangle$$

et que la distribution de Dirac a la propriété suivante pour une fonction $F(x)$ quelconque :

$$\int_0^L F(x) \delta(x - x_0) dx = \langle F, \delta_{x_0} \rangle = F(x_0).$$

La réponse forcée totale du rail s'exprime comme une combinaison linéaire de modes propres :

$$v(x, t) = \sum_n X_n(x) q_n(t).$$

17. En utilisant l'orthogonalité, établir les équations pour les coordonnées modales $q_n(t)$ avec forçage
18. Cette équation traduit l'excitation de chaque mode par une fonction harmonique dont la fréquence dépend de la vitesse v_0 du train. Préciser la pulsation d'excitation Ω_n propre à chaque mode.
19. En déduire l'expression des réponses modales $q_n(t)$
20. Pour quelle vitesse v_{0_n} du train le mode d'ordre n entre-t-il en résonance ?
21. Montrer alors que la réponse totale forcée du rail s'écrit en fonction de la vitesse v_0 du train :

$$v(x, t) = \frac{2P_0 L^2}{\pi^2 \rho S L} \sum_n \frac{1}{n^2(v_{0_n}^2 - v_0^2)} \sin(\Omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

22. Lorsque la raideur du ballast est négligeable devant celle du rail, montrer que la vitesse critique du mode n , v_{0_n} , devient :

$$v_{0_n} = n\pi \frac{c}{L}.$$

23. Tracer alors l'allure de l'amplitude la réponse du rail en fonction de la vitesse v_0 du train. Commenter.

💡 Solution

12.3.0.1 Bilan dynamique

Élément infinitésimal de poutre

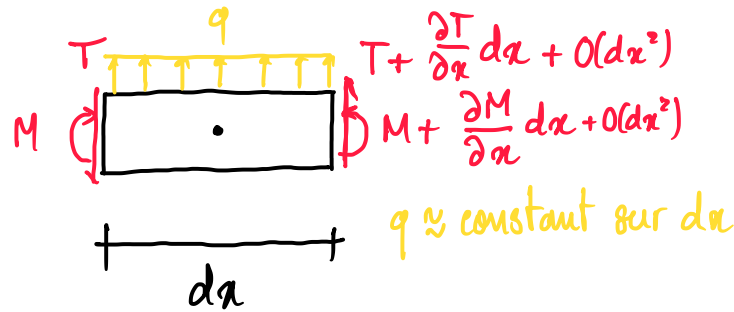


Figure 12.3: Schéma d'équilibre local de poutre.

Sur une tranche infinitésimale de poutre, la conservation de quantité de mouvement selon y se traduit en équation:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(dm\dot{v}) &= -T + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right) + qdx - kvdx \Leftrightarrow \rho S\ddot{v}dx = \left(\frac{\partial T}{\partial x} + q - kv\right)dx \\ &\Leftrightarrow \rho S\ddot{v} + kv = \frac{\partial T}{\partial x} + q \end{aligned}$$

La force répartie due au mouvement du ballast est de même nature que q , mais agit dans le sens contraire du déplacement vertical de la poutre (c'est une force de rappel).

🔥 Mise en garde

On a fait l'hypothèse que sur la tranche infinitésimale la variation spatiale de q , kv et $\ddot{v}$ est négligeable, et que ces quantités peuvent être considérées constantes sur la longueur dx . Il n'est pas nécessaire de faire cette hypothèse pour arriver aux bonnes équations mais la démonstration est plus complexe.

On écrit la conservation du moment cinétique par rapport au centre de la tranche infinitésimale. La variation du moment cinétique par rapport au temps est $dI\ddot{\theta}$, où $dI = dmdx^2/12$ et θ est la rotation de dx par rapport à son centre. Puisque q , kv et $\ddot{v}$ sont constant sur dx , leur contribution au moment cinétique par rapport au centre de la tranche sont nulles (par symétrie), et l'équation s'écrit:

$$\begin{aligned}\frac{dm dx^2}{12} \ddot{\theta} &= T \frac{dx}{2} + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \cdot \frac{dx}{2} - M + \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\rho S dx^3}{12} \ddot{\theta} &= \left(T + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dx \\ \frac{\partial M}{\partial x} + T &= dx \left(\frac{\rho S dx^2}{12} \ddot{\theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Puisque dx est aussi petit que l'on souhaite, le terme à droite disparaît, et l'on peut écrire:

$$T + \frac{\partial M}{\partial x} = 0$$

Pour clore le problème et poser l'équation d'ondes, on a besoin des équations du modèle de flexion d'Euler-Bernoulli qui relient l'angle de rotation de la poutre θ au moment de flexion M et à la flèche v :

$$\begin{cases} M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \theta = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

! Important

Une version rigoureuse de cette démonstration est donnée en Section 4.1.

12.3.0.2 Mouvement avec le modèle d'Euler-Bernoulli

Le moment fléchissant ayant pour expression

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2},$$

l'équation des vibrations transverses d'une poutre droite a pour expression

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + kv(x, t) + \rho S \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0.$$

12.3.0.3 Onde stationnaire

Solution à variables séparées : $v(x, t) = X(x)p(t)$.

12.3.0.4 Séparation des variables

On identifie à partir de l'équation du mouvement:

$$M(\dot{v}) = \rho S \dot{v}$$
$$K(v) = EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + kv$$

On a donc l'équation du mouvement suivante:

$$M(\ddot{v}) + K(v) = 0.$$

Cf. Section 3.2.3 pour la séparation de variables, on obtient alors:

$$\begin{cases} \ddot{p} + \omega^2 p = 0 \\ K(X) = \omega^2 M(X) \end{cases}$$

12.3.0.5 Forme des modes

$$K(X) = \omega^2 M(X)$$
$$\Leftrightarrow EIX'''' + kX = \omega^2 \rho SX$$
$$\Leftrightarrow X'''' - \left(\frac{\omega^2}{\frac{EI}{\rho S}} - \frac{k}{EI} \right) X = 0$$
$$\Leftrightarrow X'''' - \gamma^4 X = 0 \quad \text{avec } \gamma^2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{C^2} - \frac{k}{EI}}, \quad C = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

On peut écrire une solution générale de cette équation sous la forme :

$$X(x) = D_1(\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) \\ + D_3(\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x)$$

L'équation pour $p(t)$ donne:

$$p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

12.3.0.6 Conditions limites

Les extrémités de la poutre reposent sur des appuis simples. Les déplacements et les moments de flexion sont donc nuls en $x = 0$ et $x = L$:

$$\begin{cases} v(x=0) = 0, \\ M(x=0) = 0, \\ v(x=L) = 0, \\ M(x=L) = 0. \end{cases}$$

Compte tenu de l'expression du moment fléchissant, cela donne

$$\begin{cases} X(x=0) = 0, \\ X''(x=0) = 0, \\ X(x=L) = 0, \\ X''(x=L) = 0. \end{cases}$$

12.3.0.7 Nombres d'ondes γ_n

En $x = 0$, on a

$$\begin{cases} X(0) = 0, \\ X''(0) = 0, \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} D_1 = 0, \\ D_2 = 0, \end{cases}$$

En $x = L$, on a

$$\begin{cases} X(L) = 0, \\ X''(L) = 0, \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} D_3(\sin \gamma L + \sinh \gamma L) + D_4(\sin \gamma L - \sinh \gamma L) = 0, \\ D_3(-\sin \gamma L + \sinh \gamma L) + D_4(-\sin \gamma L - \sinh \gamma L) = 0, \end{cases}$$

On en déduit $D_3 = D_4$ et $\sin \gamma L = 0$, d'où $\gamma_n L = n\pi$, et l'expression des fonctions propres du rail :

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

12.3.0.8 Normalisation de X_n

La relation d'orthogonalité ayant pour expression

$$\int_0^L X_n(x) X_m(x) dx = \delta_{mn},$$

le coefficient de normalisation a pour expression

$$D_n = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

12.3.0.9 Fréquences propres

$$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 = \frac{\rho S \omega^2 - k}{EI} \Leftrightarrow \omega_n = \frac{c}{L^2} \sqrt{(n\pi)^4 + \frac{kL^4}{EI}} \geq \omega_{n,k=0} = \frac{c}{L^2} (n\pi)^2$$

Les fréquences propres avec ballast sont plus élevées, ce qui est normal puisque la structure est plus raide. En revanche les modes propres ont la même forme.

i Note

En exprimant les pulsations propres comme:

$$\omega_1 = \frac{(n\pi)^2 c}{L^2} \sqrt{1 + \frac{1}{\pi^4 n^4} \frac{kL^4}{EI}},$$

on remarque que l'influence du ballast, gouvernée par le nombre sans dimension $\frac{kL^4}{\pi^4 n^4 EI}$, diminue pour les modes hautes fréquences. Ces modes tendent rapidement vers ceux d'une poutre simple sans ballast.

12.3.0.10 Vibration libre

$$v(x, t) = \sum_n X_n(x) p_n(t) = \sum_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) X_n(x)$$

12.3.0.11 Conditions initiales

On détermine les inconnues A_n et B_n à partir des conditions initiales en position et en vitesse.

12.3.0.12 Méthode de Rayleigh pour le mode fondamental

On a l'équation de flexion statique :

$$EI \frac{d^4 v_{\text{sta}}}{dx^4} = -\rho S g$$

En intégrant deux fois, on obtient:

$$EI \frac{d^2 v_{\text{sta}}}{dx^2} = -\rho S g \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Le terme à gauche est le moment de flexion, qui est nul pour $x = 0$ et $x = L$, donc:

$$C_1 = \rho S g \frac{L}{2}, \quad C_2 = 0$$

On intègre deux fois pour trouver le déplacement :

$$EI v_{\text{sta}}(x) = \rho S g \left(\frac{Lx^3}{12} - \frac{x^4}{24} \right) + C_3 x + C_4$$

Le déplacement est nul en $x = 0$ et $x = L$, donc:

$$C_3 = -\rho S g \frac{L^3}{24}, \quad C_4 = 0$$

On a alors:

$$\begin{aligned} v_{\text{sta}}(x) &= \frac{\rho S g}{EI} \left(\frac{Lx^3}{12} - \frac{x^4}{24} - \frac{L^3 x}{24} \right) \\ &= \frac{\rho S g}{12EI} (Lx^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}L^3 x) \\ &= \frac{\rho S g L^4}{12EI} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^4 - \frac{1}{2} \frac{x}{L} \right] \\ &\propto \phi \left(\frac{x}{L} \right) \end{aligned}$$

On peut calculer les énergies (avec le changement de variable $z = \frac{x}{L}$, $dx = Ldz$):

$$\begin{aligned} U(\phi) &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{d^2}{dx^2} \phi \left(\frac{x}{L} \right) \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k \left[\phi \left(\frac{x}{L} \right) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{EI}{L^3} \int_0^1 [\phi''(z)]^2 dz + \frac{1}{2} kL \int_0^1 [\phi(z)]^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{EI}{L^3} \frac{6}{5} + kL \frac{31}{2520} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\phi) &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left[\phi \left(\frac{x}{L} \right) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \rho S L \int_0^1 [\phi(z)]^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \rho S L \frac{31}{2520} \end{aligned}$$

Le quotient de Rayleigh donne:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &\approx \frac{U(\phi)}{T(\phi)} = \frac{\frac{6EI}{5L^4} + k \frac{31}{2520}}{\rho S \frac{31}{2520}} \\ &= \frac{1}{L^4} \left\{ \frac{6 \cdot 2520}{5 \cdot 31} \frac{EI}{\rho S} + \frac{kL^4}{\rho S} \right\} \\ &= \frac{1}{L^4} \frac{EI}{\rho S} \left(\frac{6 \cdot 2520}{5 \cdot 31} + \frac{kL^4}{EI} \right) \\ &\Rightarrow \omega_1 \approx \frac{c}{L^2} \sqrt{\frac{6 \cdot 2520}{5 \cdot 31} + \frac{kL^4}{EI}} \end{aligned}$$

On a bien les bonnes dépendances de ω_1 aux paramètres du problème ! Le nombre sans dimension $\frac{kL^4}{EI}$ gouverne l'importance de la raideur du ballast par rapport à la raideur du rail. Pour $\frac{kL^4}{EI} \ll \frac{6 \cdot 2520}{5 \cdot 31} \approx 97.5$ on peut négliger la raideur du ballast.

i Note

On peut vérifier que $\frac{6 \cdot 2520}{5 \cdot 31}$ est une approximation de π^4 à environ 0.1% près.

12.3.0.13 Forçage

Voir Section 3.2.7 pour la démonstration. L'équation est :

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{\langle X_n, F \rangle}{\tilde{m}_n}.$$

On doit donc calculer :

$$\begin{aligned} \langle X_n, F \rangle &= \langle X_n, P_0 \delta_{v_0 t} \rangle \\ &= P_0 X_n(v_0 t) \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} P_0 \sin\left(\frac{\pi n}{L} v_0 t\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} P_0 \sin \Omega_n t \quad \text{avec} \quad \Omega_n = \frac{\pi n v_0}{L} \end{aligned}$$

En remplaçant $\tilde{m}_n = \rho S$, on obtient:

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{P_0}{\rho S} \sin \Omega_n t$$

La solution est donc:

$$q_n(t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{P_0}{\rho S (\omega_n^2 - \Omega_n^2)} \sin \Omega_n t$$

12.3.0.14 Résonance

La résonance du mode n intervient quand $\Omega_n = \omega_n$. C'est à dire lorsque

$$\Omega_n = \frac{n\pi v_0}{L} \quad \Leftrightarrow \quad v_{0_n} = \frac{\omega_n L}{n\pi}.$$

12.3.0.15 Réponse totale

On a

$$v(x, t) = \frac{2P_0}{\rho SL} \sum_n \frac{\sin(\Omega_n t)}{\omega_n^2 - \Omega_n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Puisque $\Omega_n = n\pi v_0/L$ et $\omega_n = n\pi v_{0n}/L$, on en déduit

$$v(x, t) = \frac{2P_0 L^2}{\pi^2 \rho SL} \sum_n \frac{1}{n^2(v_{0n}^2 - v_0^2)} \sin(\Omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

12.3.0.16 k négligeable

Lorsque la raideur du ballast est négligeable, on a

$$\omega_n = c \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad v_{0n} = n\pi \frac{c}{L},$$

qui est bien homogène à une vitesse.

12.3.0.17 Allure de la réponse

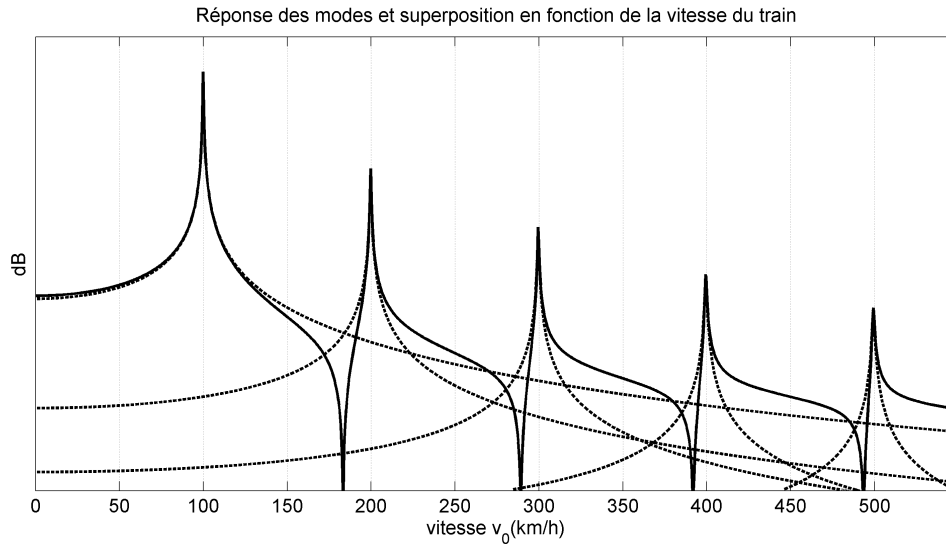


Figure 12.4: Réponse forcée du rail au passage du train- Acier, $L = 50\text{m}$, $S = 30\text{cm} \times 15\text{cm}$

Remarquer que l'écart entre les résonances est constant sur l'échelle de vitesse. Sur une échelle en fréquence il varie en n^2 . Avec des amortissements faibles, pour un ensemble discret de vitesses du train, le rail entre en résonance suivant un seul mode.

13 Vibrations d'une flèche

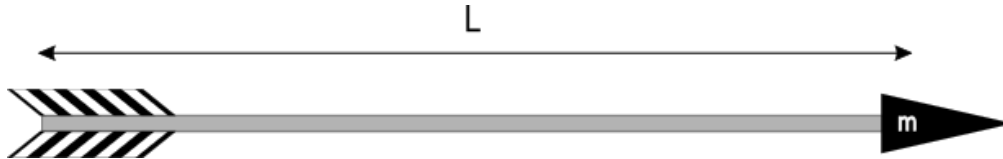


Figure 13.1: Flèche

On modélise une flèche par une poutre de longueur L , de section circulaire constante S et constituée d'un matériau homogène et isotrope de module d'Young E , et de masse volumique ρ . Son élanement permet de se placer dans l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.

La flèche est dotée d'une pointe de masse m (considérée ponctuelle) liée rigidement à l'extrémité $x = L$, et d'un empennage de masse négligeable à l'extrémité $x = 0$.

L'objet du problème est de modéliser les vibrations de la flèche dans les phases initiale et finale de sa trajectoire entre l'archer et la cible.

Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

13.1 Au départ, en quittant l'arc : vibrations libres en flexion

! Important

Dans un premier temps, on néglige la présence de la pointe.

Après que la flèche quitte la corde, l'empennage entre en contact avec la poignée de l'arc. Ce contact impose une déformation initiale et engendre une vibration de flexion libre pendant la phase de vol.

On rappelle l'équation générale des vibrations libres transverses dans une poutre droite, portant sur le déplacement transverse $v(x, t)$.

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow M(\ddot{v}) + K(v) = 0 \quad \text{avec} \quad M(\ddot{v}) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \text{ et } K(v) = EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$$

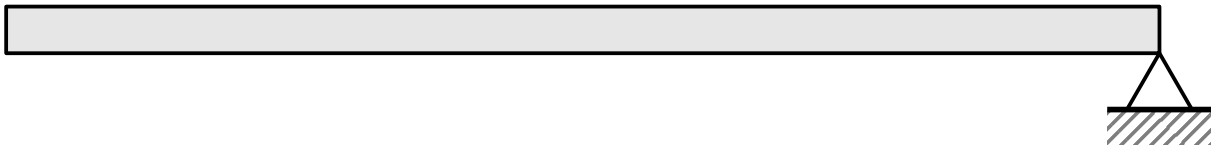
On cherche des solutions à variables séparées (ondes stationnaires) $v(x, t) = X(x)p(t)$. Les conditions nécessaires sur X et p sont:

$$\begin{cases} \ddot{p} + \omega^2 p = 0 \\ K(X) = \omega^2 M(X) \end{cases}$$

1. Donner la forme générale des fonctions X et p qui satisfont ces conditions (sans prendre en compte les conditions limites).

On considère deux possibilités de conditions limites :

Libre-appuyée



Libre-libre

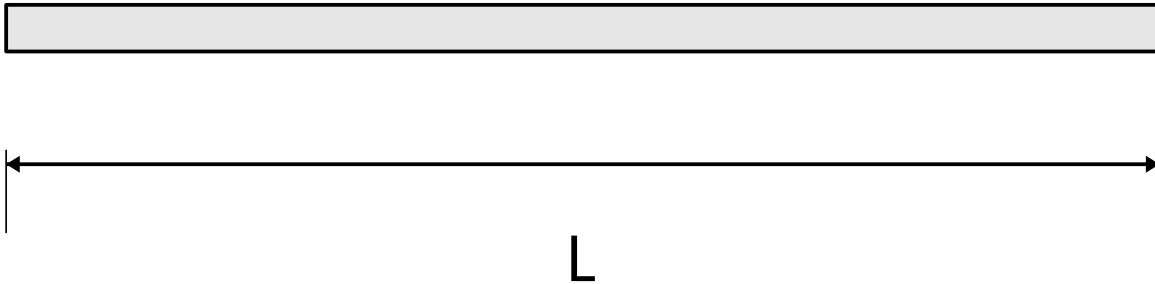


Figure 13.2: Conditions limites pour la flèche

2. Écrire les conditions limites sur $X(x)$ pour les deux cas ci-dessus.
3. Dédire des conditions limites l'équation que doivent satisfaire les nombres d'onde admissibles $\gamma_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{C}}$

! Important

On souhaite maintenant prendre en compte l'influence de la masse ponctuelle m . Pour cela, il faut établir les bonnes conditions aux limites en $x = L$.

4. On suppose m ponctuelle, son moment d'inertie est donc nul. Quelle est la condition limite sur X correspondant à cette hypothèse ?

5. Établir la dynamique du mouvement vertical de m (principe fondamental de la dynamique).
Montrer que l'équation du mouvement de m est équivalente à

$$X'''(L) = \frac{m}{\rho SL} \gamma^4 L X(L)$$

6. À quelle condition limite l'équation ci-dessus se réduit-elle lorsque:

- $m \gg \rho SL$ (masse de la flèche négligeable devant la pointe) ?
- $m \ll \rho SL$ (masse de la pointe négligeable devant la flèche) ?

7. Donner l'équation que doivent satisfaire les nombres d'onde admissibles γ_n

Solution

13.1.0.1 Forme des modes

$$\begin{aligned} K(X) &= \omega^2 M(X) \\ \Leftrightarrow EI X'''' &= \omega^2 \rho S X \\ \Leftrightarrow X'''' - \frac{\omega^2}{\frac{EI}{\rho S}} X &= 0 \\ \Leftrightarrow X'''' - \gamma^4 X &= 0 \quad \text{avec } \gamma^2 = \frac{\omega}{C}, \quad C = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \end{aligned}$$

On peut écrire une solution générale de cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned} X(x) &= D_1(\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) \\ &\quad + D_3(\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x) \end{aligned}$$

L'équation pour $p(t)$ donne:

$$p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

13.1.0.2 Conditions limites

Cas libre-libre

L'effort tranchant et le moment de flexion sont nuls aux deux extrémités, donc

$$\begin{aligned} X'''(0) &= 0 \\ X'''(L) &= 0 \\ X''(0) &= 0 \\ X''(L) &= 0 \end{aligned}$$

Cas libre-appuyée

L'effort tranchant et le moment de flexion sont nuls à $x = 0$, le moment de flexion et le déplacement transverse sont nuls à $x = L$.

$$X'''(0) = 0$$

$$X''(0) = 0$$

$$X(L) = 0$$

$$X''(L) = 0$$

13.1.0.3 Nombres d'onde et fréquences propres

Cas libre-libre

$$\cos \gamma_n L \cosh \gamma_n L = 1$$

Cas libre-appuyée

$$\frac{\tanh \gamma_n L}{\tan \gamma_n L} = 1$$

13.1.0.4 Dynamique de la masse

Le moment d'inertie est nul, cela indique que la rotation n'est pas empêchée, donc le moment en $x = L$ est nul : $\Rightarrow X''(L) = 0$.

Soit $T(x, t)$ l'effort tranchant dans la flèche. On isole la pointe, le PFD donne donc :

$$m\ddot{v}(L, t) = -T(L, t) = -EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L, t)$$

On remplace $\ddot{v}(L, t) = X(L)\ddot{p}(t)$ et $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L, t) = X'''(L)p(t)$, et on obtient:

$$mX(L)\ddot{p}(t) = -EIX'''(L)p(t)$$

On a $\ddot{p} = -\omega^2 p$, donc:

$$m\omega^2 X(L) = EIX'''(L)$$

On peut remplacer $EI = \rho SC^2$ et $\omega^2 = C^2 \gamma^4$:

$$mC^2 \gamma^4 X(L) = \rho SC^2 X'''(L) \Leftrightarrow m\gamma^4 X'''(L) = \rho SX(L) \Leftrightarrow X'''(L) = \frac{m}{\rho SL} \gamma^4 LX(L)$$

Limite $m \gg \rho SL$

On a $\frac{m}{\rho SL} \approx 0$, donc $X'''(L) \approx 0$, ce qui correspond au cas libre.

Limite $m \ll \rho SL$

On a $\frac{\rho SL}{m} \approx 0$, donc $\gamma^4 L X(L) \approx 0 \Leftrightarrow X(L) \approx 0$, ce qui correspond à une extrémité appuyée.

13.1.0.5 Équation pour γ

En combinant $X''(L) = 0$ et $X'''(L) - \bar{m}\gamma^4 L X(L) = 0$ (avec $\bar{m} = \frac{m}{\rho SL}$, et en annulant le déterminant du système d'équation linéaire, on doit avoir:

$$\begin{vmatrix} -\cos \gamma L + \cosh \gamma L & -\sin \gamma L + \sinh \gamma L \\ (\sin \gamma L + \sinh \gamma L) - \bar{m}\gamma L(\cos \gamma L + \cosh \gamma L) & (-\cos \gamma L + \cosh \gamma L) - \bar{m}\gamma L(\sin \gamma L + \sinh \gamma L) \end{vmatrix} = 0$$

13.2 A l'arrivée sur la cible : Vibrations longitudinales

A l'arrivée sur la cible, la flèche est au repos dans son repère propre et la décélération brutale engendre une force d'inertie longitudinale $f(x, t)$ qui s'applique de façon uniforme sur toute la longueur et donne naissance à une onde longitudinale stationnaire régie par l'équation du mouvement forcé suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho S} f(x, t) = g(x, t)$$

La flèche est considérée encastree à la pointe et libre à l'empennage.

Les fréquences propres et les modes propres s'écrivent respectivement :

$$\omega_n = \gamma_n C_L = (2n + 1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{et} \quad X_n(x) = \cos \left((2n + 1) \frac{\pi x}{2L} \right)$$

Et on rappelle l'expression de masses et raideurs modales pour les ondes longitudinales :

$$m_n = \rho S \int_0^L X_n^2(x) dx \quad \text{et} \quad k_n = -ES \int_0^L X_n(x) X_n''(x) dx$$

Par ailleurs, si on considère que la vitesse V_o de la flèche est constante sur la fin de la trajectoire, sa variation brutale s'exprime simplement :

$$\dot{u}_0 = V_o(1 - H(t)) = \begin{cases} V_o & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

et l'accélération : $\ddot{u}_0 = -V_o \delta(t)$ En partant de l'équation des ondes forcées, établir l'équation différentielle vérifiée par chaque mode et faisant intervenir m_n et k_n .

💡 Solution

L'équation du mouvement forcé se développe de la façon suivante en faisant appel à la propriété d'orthogonalité des modes

$$\begin{aligned}
 \sum_n \ddot{\phi}_n(t) X_n(x) - C_l^2 \phi_n(t) X_n''(x) &= \frac{V_o \delta(t)}{\rho S} \\
 \Leftrightarrow \sum_n \ddot{\phi}_n(t) X_n(x) X_m(x) - C_l^2 \phi_n(t) X_n''(x) X_m(x) &= X_m(x) \frac{V_o \delta(t)}{\rho S} \\
 \Leftrightarrow \sum_n \ddot{\phi}_n(t) \int_0^L X_n(x) X_m(x) dx - C_l^2 \phi_n(t) \int_0^L X_n''(x) X_m(x) dx &= \frac{V_o \delta(t)}{\rho S} \int_0^L X_m(x) dx \\
 \Leftrightarrow \ddot{\phi}_n(t) \int_0^L X_n^2(x) dx - C_l^2 \phi_n(t) \int_0^L X_n''(x) X_n(x) dx &= \frac{V_o \delta(t)}{\rho S} \int_0^L X_n(x) dx \\
 \Leftrightarrow \frac{m_n}{\rho S} \ddot{\phi}_n(t) + C_l^2 \frac{k_n}{ES} \phi_n(t) &= \frac{V_o \delta(t)}{\rho S} \int_0^L X_n(x) dx \\
 \Leftrightarrow m_n \ddot{\phi}_n(t) + k_n \phi_n(t) &= \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{2L}{\pi} V_o \delta(t)
 \end{aligned}$$

A l'aide de la transformée de Laplace, déterminer l'expression de la vibration longitudinale $u(x, t)$ de la flèche heurtant la cible.

💡 Solution

On passe dans l'espace de Laplace en considérant que, dans le repère lié à la flèche, les conditions initiales au moment du choc sont nulles en déplacement et en vitesse :

$$\begin{aligned}
 (m_n s^2 + k_n) \tilde{\phi}(s) &= \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{2L}{\pi} V_o \delta(t) \\
 \Leftrightarrow m_n (s^2 + \omega_n^2) \tilde{\phi}(s) &= -\frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{2L}{\pi} V_o \\
 \Leftrightarrow \tilde{\phi}(s) &= -\frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{2L}{\pi m_n} \frac{V_o}{s^2 + \omega_n^2}
 \end{aligned}$$

Par transformation de Laplace inverse :

$$\phi_n(t) = -\frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{2L}{\pi m_n} \frac{V_o}{s^2 + \omega_n^2} H(t) \sin \omega_n t$$

et finalement la vibration complète est la superposition des contributions de tous les modes.

$$u(x, t) = \sum_n \phi_n(t) X_n(x) = -\frac{2LV_o}{\pi} H(t) \sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)m_n\omega_n} \cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{2L}\right) \sin \omega_n t$$

Commentez ce résultat

Solution

Au moment du contact avec la cible, la vibration est la superposition des modes libres, chacun intervenant avec une contribution inversement proportionnelle à la fréquence propre associée. Cette contribution décroît avec l'ordre du mode. Les modes d'ordre faible sont prépondérants.

Formulaire:

$$f(t) \longleftrightarrow \tilde{f}(s)$$

$$\ddot{f}(t) \longleftrightarrow s^2 \tilde{f}(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$\sin(\omega_0 t) H(t) \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

14 Méthodes approchées en vibrations longitudinales

On souhaite déterminer les fréquences propres et les modes propres de vibrations longitudinales de poutres complexes par une méthode approchée : la méthode de Rayleigh-Ritz. Pour cela, il est nécessaire de définir les fonctions propres associées aux deux premiers modes de vibration d'une poutre bi-encastrée :

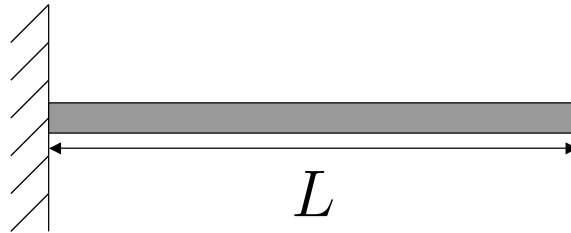


Figure 14.1: Poutre console

$$\begin{cases} g_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \\ g_2(x) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2L}\right). \end{cases}$$

Dans un premier temps, on considère le cas où l'autre extrémité est solidaire d'un matériau élastique de raideur k . La poutre subit les vibrations harmoniques de ses supports, ce qui engendre l'apparition d'ondes de traction-compression. En utilisant comme fonctions propres de déplacement $g_0(x)$ et $g_1(x)$, déterminer les deux premières pulsations propres et les modes correspondants. On étudiera le cas particulier où $k = ES/L$.

💡 Solution

On définit le déplacement par l'expression

$$u(x, t) \approx f_1(t) \sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right) + f_2(t) \sin\left(\frac{3\pi}{2L}x\right),$$

L'énergie de déformation U est la somme de l'énergie de déformation de la poutre U_p et de l'énergie de déformation du ressort U_r . L'énergie de déformation de la poutre U_p a pour ex-

pression

$$\begin{aligned}
 U_p &= \frac{1}{2} \int_0^L ES \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \\
 &= \frac{ES}{2} \int_0^L \left[\frac{\pi}{2L} f_1(t) \cos \left(\frac{\pi}{2L} x \right) + \frac{3\pi}{2L} f_2(t) \cos \left(\frac{3\pi}{2L} x \right) \right]^2 dx \\
 &= \frac{\pi^2 ES}{8L^2} \int_0^L \left[f_1^2(t) \cos^2 \left(\frac{\pi}{2L} x \right) + 9f_2^2(t) \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2L} x \right) + 6f_1(t)f_2(t) \cos \left(\frac{\pi}{2L} x \right) \cos \left(\frac{3\pi}{2L} x \right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\pi^2 ES}{8L} [f_1^2(t) + 9f_2^2(t)].
 \end{aligned}$$

L'énergie de déformation du ressort U_r a pour expression

$$\begin{aligned}
 U_r &= \frac{1}{2} k [u(B, t) - u(L, t)]^2 \\
 &= \frac{1}{2} k [u(L, t)]^2 \\
 &= \frac{1}{2} k \left[f_1(t) \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) + f_2(t) \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right]^2 \\
 &= \frac{1}{2} k [f_1(t) - f_2(t)]^2 \\
 &= \frac{1}{2} k [f_1^2(t) + f_2^2(t) - 2f_1(t)f_2(t)].
 \end{aligned}$$

L'énergie de déformation a donc pour expression

$$\begin{aligned}
 U &= U_p + U_r \\
 &= \frac{1}{2} \left[f_1^2(t) \left(k + \frac{\pi^2 ES}{8L} \right) + f_2^2(t) \left(k + \frac{9\pi^2 ES}{8L} \right) - 2kf_1(t)f_2(t) \right].
 \end{aligned}$$

La matrice de raideur a donc pour expression

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k + \frac{\pi^2 ES}{8L} & -k \\ -k & k + \frac{9\pi^2 ES}{8L} \end{pmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\pi^2}{8} & -1 \\ -1 & 1 + \frac{9\pi^2}{8} \end{pmatrix}.$$

Ici le ressort est considéré de masse négligeable. L'énergie cinétique du système est égale à

l'énergie cinétique de la poutre et a pour expression

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \\
 &= \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[\dot{f}_1(t) \sin \left(\frac{\pi}{2L} x \right) + \dot{f}_2(t) \sin \left(\frac{3\pi}{2L} x \right) \right]^2 dx \\
 &= \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[\dot{f}_1^2(t) \sin^2 \left(\frac{\pi}{2L} x \right) + \dot{f}_2^2(t) \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2L} x \right) + 2 \dot{f}_1(t) \dot{f}_2(t) \sin \left(\frac{\pi}{2L} x \right) \sin \left(\frac{3\pi}{2L} x \right) \right] dx \\
 &= \frac{\rho S}{2} \left[\dot{f}_1^2(t) \frac{L}{2} + \dot{f}_2^2(t) \frac{L}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\rho S L}{2} \left[\dot{f}_1^2(t) + \dot{f}_2^2(t) \right].
 \end{aligned}$$

La matrice d'inertie a donc pour expression

$$\mathbf{M} = \frac{\rho S L}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système matriciel à résoudre est donc le suivant :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \ddot{f}_1 \\ \ddot{f}_2 \end{pmatrix} + \mathbf{K} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution du type

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = e^{j\omega t} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

conduisant au système

$$\begin{pmatrix} \frac{ES}{L} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \right) - \omega^2 \frac{\rho S L}{2} & -\frac{ES}{L} \\ -\frac{ES}{L} & \frac{ES}{L} \left(1 + \frac{9\pi^2}{8} \right) - \omega^2 \frac{\rho S L}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 2 \frac{c_L^2}{L^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \right) - \omega^2 & -2 \frac{c_L^2}{L^2} \\ -2 \frac{c_L^2}{L^2} & 2 \frac{c_L^2}{L^2} \left(1 + \frac{9\pi^2}{8} \right) - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique a pour expression

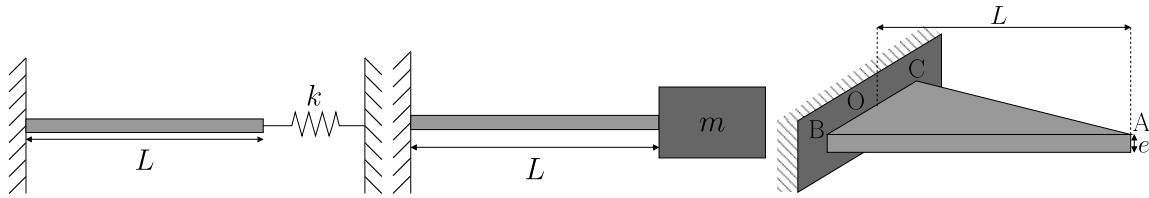
$$\begin{aligned}
 P(\omega^2) &= \left[2 \frac{c_L^2}{L^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \right) - \omega^2 \right] \left[2 \frac{c_L^2}{L^2} \left(1 + \frac{9\pi^2}{8} \right) - \omega^2 \right] - \left(2 \frac{c_L^2}{L^2} \right)^2 \\
 &= \omega^4 - \omega^2 \left(4 + \frac{5\pi^2}{2} \right) \frac{c_L^2}{L^2} + \left(5\pi^2 + \frac{9\pi^4}{16} \right) \frac{c_L^4}{L^4}
 \end{aligned}$$

L'annulation du polynôme caractéristique conduit aux carrés des pulsations

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{c_L}{L} \sqrt{2 + \frac{5\pi^2}{4} - \sqrt{\pi^4 + 4}} = 2,07 \frac{c_L}{L}, \\ \omega_2 = \frac{c_L}{L} \sqrt{2 + \frac{5\pi^2}{4} + \sqrt{\pi^4 + 4}} = 4,94 \frac{c_L}{L}. \end{cases}$$

Les vecteurs propres associés ont pour expression

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -9,97 \end{pmatrix}.$$



On suppose maintenant que l'extrémité libre supporte une charge de masse m . La poutre subissant la même excitation, en utilisant les mêmes fonctions de déplacement, déterminer les deux premières pulsations propres et les modes correspondants. On étudiera le cas particulier où $m = \rho SL/10$.

💡 Solution

L'énergie cinétique T est la somme de l'énergie cinétique de la poutre T_p et de l'énergie cinétique de la masse m T_m . L'énergie cinétique de la poutre T_p a pour expression

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho SL}{2} [\dot{f}_1^2(t) + \dot{f}_2^2(t)]. \end{aligned}$$

L'énergie cinétique de la masse T_m a pour expression

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{1}{2} m [\dot{u}(L, t)]^2 \\ &= \frac{1}{2} m [\dot{f}_1(t) - \dot{f}_2(t)]^2 \\ &= \frac{1}{2} m [\dot{f}_1^2(t) + \dot{f}_2^2(t) - 2\dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)] \end{aligned}$$

L'énergie cinétique a donc pour expression

$$\begin{aligned}
 T &= T_p + T_m \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\rho SL}{2} [\dot{f}_1^2(t) + \dot{f}_2^2(t)] + \frac{1}{2} m [\dot{f}_1^2(t) + \dot{f}_2^2(t) - 2\dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\dot{f}_1^2(t) \left(m + \frac{\rho SL}{2} \right) + \dot{f}_2^2(t) \left(m + \frac{\rho SL}{2} \right) - 2m\dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t) \right]
 \end{aligned}$$

La matrice d'inertie a donc pour expression

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m + \frac{\rho SL}{2} & -m \\ -m & m + \frac{\rho SL}{2} \end{pmatrix} = \frac{\rho SL}{10} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

L'énergie de déformation du système est égale à l'énergie de déformation de la poutre et a pour expression

$$\begin{aligned}
 U_p &= \frac{1}{2} \int_0^L ES \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\pi^2 ES}{8L} [f_1^2(t) + 9f_2^2(t)]
 \end{aligned}$$

La matrice d'inertie a donc pour expression

$$\mathbf{K} = \frac{\pi^2 ES}{8L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Le système matriciel à résoudre est donc le suivant :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \ddot{f}_1 \\ \ddot{f}_2 \end{pmatrix} + \mathbf{K} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution du type

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = e^{j\omega t} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

conduisant au système

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi^2 ES}{8L} - \omega^2 \frac{6\rho SL}{10} & \omega^2 \frac{\rho SL}{10} \\ \omega^2 \frac{\rho SL}{10} & \frac{9\pi^2 ES}{8L} - \omega^2 \frac{6\rho SL}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \frac{10\pi^2 c_L^2}{8L^2} - 6\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \frac{90\pi^2 c_L^2}{8L^2} - 6\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique a pour expression

$$P(\omega^2) = \left(\frac{10\pi^2 c_L^2}{8L^2} - 6\omega^2 \right) \left(\frac{90\pi^2 c_L^2}{8L^2} - 6\omega^2 \right) - \omega^4 = 35\omega^4 - \frac{75\pi^2 c_L^2}{L^2} \omega^2 + \left(\frac{15\pi^2 c_L^2}{4L^2} \right)^2$$

L'annulation du polynôme caractéristique conduit aux pulsations

$$\begin{cases} \omega_1 = 1,43 \frac{c_L}{L}, \\ \omega_2 = 4,37 \frac{c_L}{L}. \end{cases}$$

Les vecteurs propres associés ont pour expression

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,02 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5,35 \end{pmatrix}.$$

La poutre ABC de longueur $OA=L$, telle que $OB=OC=h$ de masse $m(x)$ et de section rectangulaire $S(x)$, par unité de longueur, de faible épaisseur e , encastree à l'extrémité $x=0$ et libre en $x=L$, subit les vibrations harmoniques de son support agissant en traction-compression. On pourra poser $m_0 = \rho S_0 = \rho e h$.

Donner l'expression de la section $S(x)$ en fonction de S_0 et L .

Solution

La relation entre le demi-angle du triangle et la position est donnée par la relation

$$\tan \alpha = \frac{h}{L} = \frac{b(x)}{L-x}.$$

On en déduit

$$b(x) = \frac{h(L-x)}{L} = h \left(1 - \frac{x}{L} \right).$$

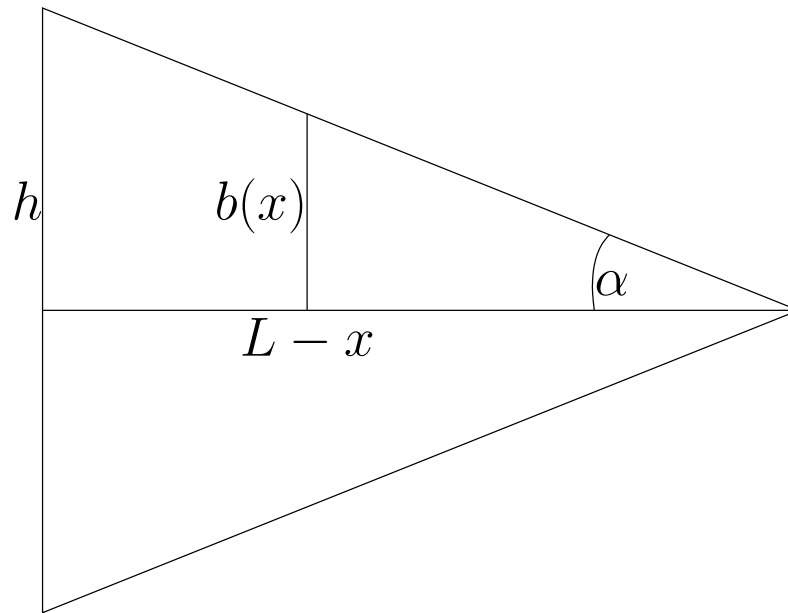


Figure 14.2: image

La section a donc pour expression

$$S(x) = 2b(x)e = 2S_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie de déformation de la poutre à partir des fonctions de déplacement choisies. En déduire les matrices d'inertie et de raideur.

💡 Solution

L'énergie cinétique de la poutre a pour expression

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho S(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \\
 &= \rho S_0 \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \left[\dot{f}_1(t) \sin \left(\frac{\pi}{2L} x \right) + \dot{f}_2(t) \sin \left(\frac{3\pi}{2L} x \right) \right]^2 dx \\
 &= \rho S_0 \left\{ \dot{f}_1^2(t) \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{2L} x \right) dx + \dot{f}_2^2(t) \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2L} x \right) dx \right. \\
 &\quad \left. + 2\dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t) \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2L} x \right) \sin \left(\frac{3\pi}{2L} x \right) dx \right\} \\
 &= \rho S_0 \left[\dot{f}_1^2(t) \left(\frac{L}{4} - \frac{L}{\pi^2} \right) + \dot{f}_2^2(t) \left(\frac{L}{4} - \frac{L}{9\pi^2} \right) + \frac{2L}{\pi^2} \dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t) \right] \\
 &= \frac{1}{2} 2m_0 L \left[\dot{f}_1^2(t) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) + \dot{f}_2^2(t) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9\pi^2} \right) + \frac{2}{\pi^2} \dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t) \right].
 \end{aligned}$$

La matrice d'inertie a donc pour expression

$$\mathbf{M} = \rho S_0 L \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} & \frac{2}{\pi^2} \\ \frac{2}{\pi^2} & \frac{1}{2} - \frac{2}{9\pi^2} \end{pmatrix}.$$

L'énergie de déformation de la poutre a pour expression

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^L ES(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \\
 &= \frac{ES_0 \pi^2}{4L^2} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \left[f_1(t) \cos \left(\frac{\pi}{2L} x \right) + 3f_2(t) \cos \left(\frac{3\pi}{2L} x \right) \right]^2 dx \\
 &= \frac{ES_0 \pi^2}{4L^2} \left\{ f_1^2(t) \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{2L} x \right) dx + 9f_2^2(t) \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2L} x \right) dx \right. \\
 &\quad \left. + 6f_1(t)f_2(t) \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2L} x \right) \cos \left(\frac{3\pi}{2L} x \right) dx \right\} \\
 &= \frac{ES_0 \pi^2}{4L^2} \left[f_1^2(t) \left(\frac{L}{4} + \frac{L}{\pi^2} \right) + 9f_2^2(t) \left(\frac{L}{4} + \frac{L}{9\pi^2} \right) + \frac{6L}{\pi^2} f_1(t)f_2(t) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{ES_0}{L} \left[f_1^2(t) \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right) + f_2^2(t) \left(\frac{9\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right) + 3f_1(t)f_2(t) \right].
 \end{aligned}$$

La matrice d'inertie a donc pour expression

$$\mathbf{K} = \frac{ES_0}{L} \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{9\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Déterminer les pulsations propres et les modes correspondants.

💡 Solution

Le système matriciel à résoudre est donc le suivant :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \ddot{f}_1 \\ \ddot{f}_2 \end{pmatrix} + \mathbf{K} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution du type

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = e^{j\omega t} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

conduisant au système

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{L} \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right) - 2\rho L \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) \omega^2 & \frac{3E}{2L} - \frac{2\rho L}{\pi^2} \omega^2 \\ \frac{3E}{2L} - \frac{2\rho L}{\pi^2} \omega^2 & \frac{E}{L} \left(\frac{9\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right) - 2\rho L \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9\pi^2} \right) \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'annulation du déterminant conduit aux carrés des pulsations

$$\begin{cases} \omega_1 = 2,41 \frac{c_L}{L}, \\ \omega_2 = 5,53 \frac{c_L}{L}. \end{cases}$$

Les vecteurs propres associés ont pour expression

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,037 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1,567 \end{pmatrix}.$$

15 Vibrations transverses : Méthode de Rayleigh-Ritz

On souhaite maintenant déterminer les fréquences propres et les modes propres de vibrations transverses de poutres complexes par une méthode approchée : la méthode de Rayleigh-Ritz. Pour une poutre encastrée-libre, les fonctions de déplacement $g_0(x)$ et $g_1(x)$ ont pour expressions respectives :

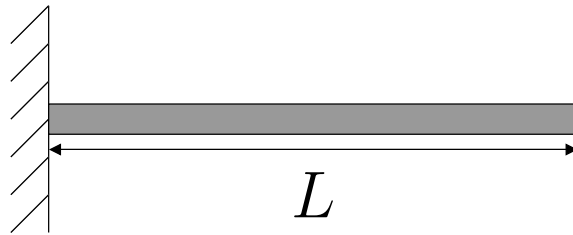


Figure 15.1: Poutre console

$$\begin{cases} g_0(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2, \\ g_1(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^3. \end{cases}$$

Déterminer les deux premières pulsations propres et les modes correspondants dans le cas de vibrations libres en flexion.

💡 Solution

Le déplacement est donné par l'expression

$$v(x, t) \approx f_1(t) \left(\frac{x}{L}\right)^2 + f_2(t) \left(\frac{x}{L}\right)^3.$$

L'énergie cinétique a pour expression

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx \\ &= \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[\dot{f}_1^2(t) \left(\frac{x}{L}\right)^4 + \dot{f}_2^2(t) \left(\frac{x}{L}\right)^6 + 2\dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t) \left(\frac{x}{L}\right)^5 \right] dx \\ &= \frac{\rho S}{2} \left[\dot{f}_1^2(t) \frac{L}{5} + \dot{f}_2^2(t) \frac{L}{7} + 2\dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t) \frac{L}{6} \right] \end{aligned}$$

La matrice d'inertie a donc pour expression

$$\mathbf{M} = \rho SL \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

L'énergie de déformation a pour expression

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^L \left[f_1(t) \frac{2}{L^2} + f_2(t) \frac{6x}{L^3} \right]^2 dx \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^L \left[f_1^2(t) \frac{4}{L^4} + f_2^2(t) \frac{36x^2}{L^6} + 24f_1(t)f_2(t) \frac{x}{L^5} \right] dx \\ &= \frac{EI}{2} \left[f_1^2(t) \frac{4}{L^3} + f_2^2(t) \frac{12}{L^3} + f_1(t)f_2(t) \frac{12}{L^3} \right] \end{aligned}$$

La matrice d'inertie a donc pour expression

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Le système matriciel à résoudre est donc le suivant :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \ddot{f}_1 \\ \ddot{f}_2 \end{pmatrix} + \mathbf{K} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution du type

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = e^{j\omega t} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

conduisant au système

$$\begin{pmatrix} 4\frac{EI}{L^3} - \omega^2 \frac{\rho SL}{5} & 6\frac{EI}{L^3} - \omega^2 \frac{\rho SL}{6} \\ 6\frac{EI}{L^3} - \omega^2 \frac{\rho SL}{6} & 12\frac{EI}{L^3} - \omega^2 \frac{\rho SL}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 4\frac{c_L^2}{L^4} - \frac{\omega^2 L}{5} & 6\frac{c_L^2}{L^4} - \frac{\omega^2 L}{6} \\ 6\frac{c_L^2}{L^4} - \frac{\omega^2 L}{6} & 12\frac{c_L^2}{L^4} - \frac{\omega^2 L}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

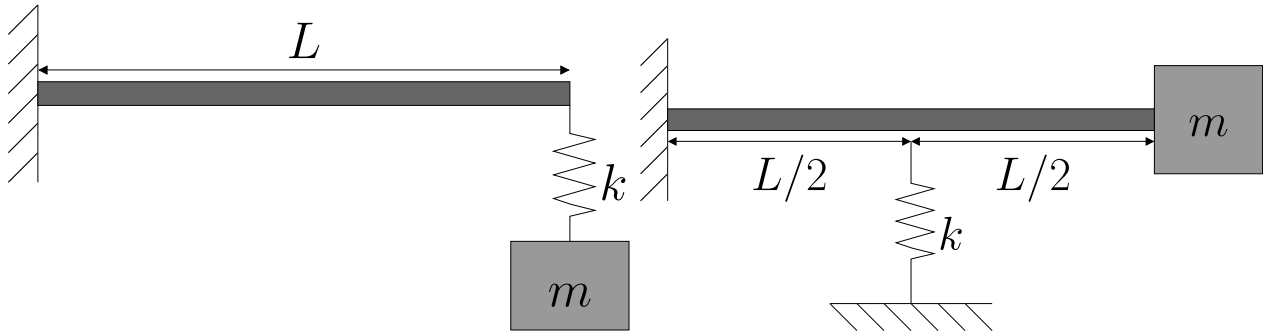
L'annulation du déterminant conduit aux carrés des pulsations

$$\begin{cases} \omega_1 = 3,53 \frac{c}{L^2}, \\ \omega_2 = 34,8 \frac{c}{L^2}. \end{cases}$$

Les vecteurs propres associés ont pour expression

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,38 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1,22 \end{pmatrix}.$$

La poutre est maintenant encastree en $x = 0$ et l'autre extremité est liée à un support de masse m et de raideur k . En utilisant les mêmes fonctions de déplacement que pour la poutre encastree-libre et en notant $f_3(t)$ le déplacement de la masse, déterminer les trois premières pulsations propres et les modes correspondants. On étudiera le cas particulier où $k = EI/L^3$ et $m = \rho SL/7$.



💡 Solution

L'énergie cinétique E_c est la somme de l'énergie cinétique E_c^p de la poutre et de celle E_c^m de la masse :

$$T = T_p + T_m = \frac{\rho S}{2} \left[\dot{f}_1^2(t) \frac{L}{5} + \dot{f}_2^2(t) \frac{L}{7} + 2\dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t) \frac{L}{6} \right] + \frac{1}{2} m \dot{f}_3^2(t).$$

La matrice d'inertie a donc pour expression

$$\mathbf{M} = \rho SL \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

L'énergie de déformation E_d est la somme de l'énergie de déformation E_d^p de la poutre et de

celle E_d^m de la masse :

$$U = U_p + U_m$$

$$= \frac{EI}{2} \left[f_1^2(t) \frac{4}{L^3} + f_2^2(t) \frac{12}{L^3} + f_1(t)f_2(t) \frac{12}{L^3} \right] + \frac{1}{2}k(v(L) - f_3(t))^2$$

$$= \frac{EI}{2} \left[f_1^2(t) \frac{4}{L^3} + f_2^2(t) \frac{12}{L^3} + f_1(t)f_2(t) \frac{12}{L^3} \right] + \frac{1}{2}k[f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)]^2$$

$$= \frac{EI}{2} \left[f_1^2(t) \frac{4}{L^3} + f_2^2(t) \frac{12}{L^3} + f_1(t)f_2(t) \frac{12}{L^3} \right] + \frac{1}{2}k[f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t) + 2f_1(t)f_2(t) - 2f_1(t)f_3(t) - 2f_2(t)f_3(t)]$$

La matrice d'inertie a donc pour expression

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 7 & 13 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après avoir posé $a = \frac{\rho SL^4}{EI}$, le système matriciel à résoudre est donc le suivant :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \ddot{f}_1 \\ \ddot{f}_2 \end{pmatrix} + \mathbf{K} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution du type

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = e^{j\omega t} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

conduisant au système

$$\begin{pmatrix} 5 - \frac{a\omega^2}{5} & 7 - \frac{a\omega^2}{6} & -1 \\ 7 - \frac{a\omega^2}{6} & 13 - \frac{a\omega^2}{7} & -1 \\ -1 & -1 & 1 - \frac{a\omega^2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'annulation du déterminant conduit aux carrés des pulsations

$$\begin{cases} \omega_1 = 2,14 \frac{c}{L^2}, \\ \omega_2 = 4,35 \frac{c}{L^2}, \\ \omega_3 = 34,92 \frac{c}{L^2}. \end{cases}$$

On considère la même poutre supportant à son extrémité libre une charge de masse M et supportée en son milieu par un matériau élastique de raideur k . Calculer la fréquence fondamentale des

vibrations en flexion de ce système, en utilisant la fonction de déplacement $v(x, t)$.

$$v(x, t) = f(t) \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right].$$

Solution

Le déplacement est donné par l'expression

$$v(x, t) \approx f(t) \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right].$$

L'énergie cinétique de la poutre a pour expression

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \\ &= \frac{\rho S}{2} \dot{f}^2(t) \int_0^L \left[9 \left(\frac{x}{L} \right)^4 + \left(\frac{x}{L} \right)^6 - 6 \left(\frac{x}{L} \right)^5 \right] dx \\ &= \frac{\rho S L}{2} \dot{f}^2(t) \left(\frac{9}{5} + \frac{1}{7} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{33 \rho S L}{35} \dot{f}^2(t) \end{aligned}$$

L'énergie cinétique de la masse a pour expression

$$T_m = \frac{1}{2} M v^2(L, t) = \frac{1}{2} 4M \dot{f}^2(t)$$

L'énergie de déformation de la poutre a pour expression

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} EI \dot{f}^2(t) \int_0^L \left[\frac{6}{L^2} - \frac{6x}{L^3} \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} EI \dot{f}^2(t) \int_0^L \left[\frac{36}{L^4} + \frac{36x^2}{L^6} - \frac{72x}{L^5} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{12 EI}{L^3} \dot{f}^2(t) \end{aligned}$$

L'énergie de déformation de la masse a pour expression

$$U_m = \frac{1}{2} k v^2(L/2, t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{25k}{64} \dot{f}^2(t)$$

L'équation à résoudre est donc la suivante :

$$\left(\frac{33\rho SL}{35} + 4M \right) \ddot{f} + \left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{25k}{64} \right) f = 0.$$

On cherche une solution du type

$$f(t) = Fe^{j\omega t}$$

conduisant à l'équation

$$\left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{25k}{64} \right) - \left(\frac{33\rho SL}{35} + 4M \right) \omega^2 = 0.$$

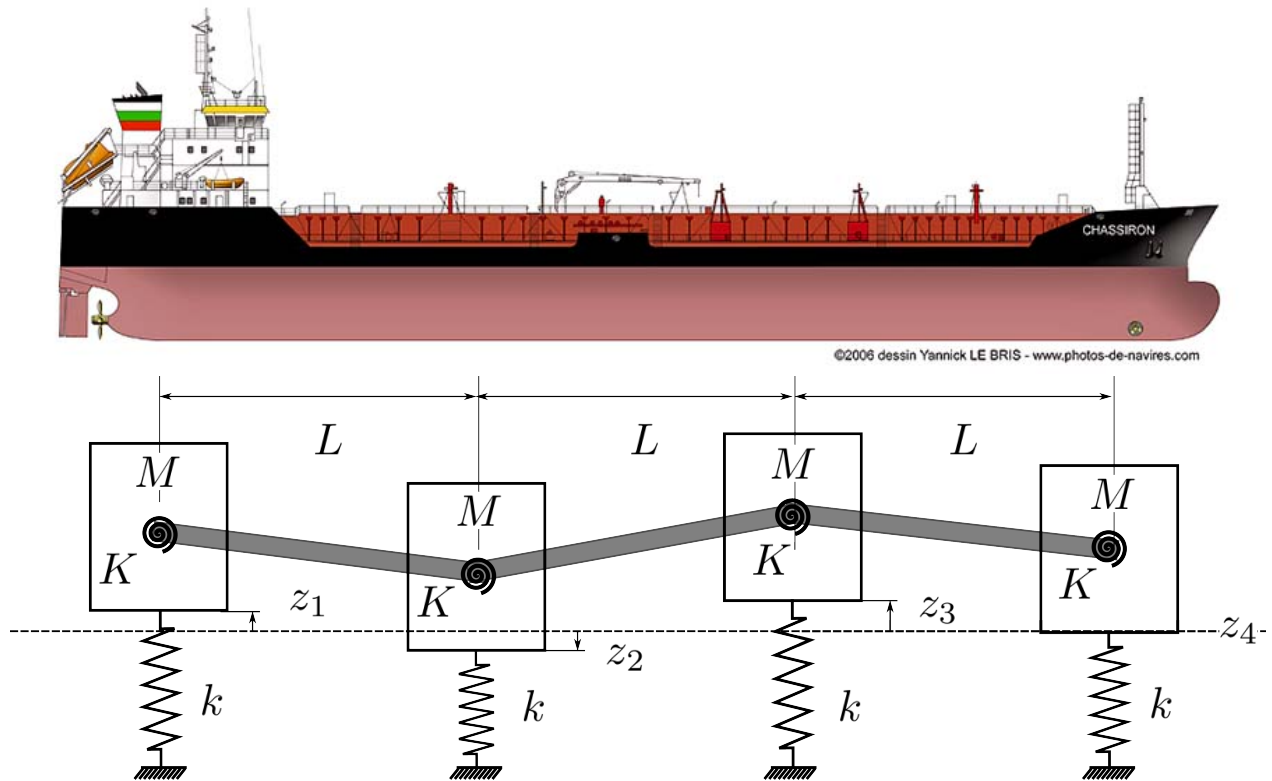
La pulsation propre a alors pour expression

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{12EI}{L^3} + \frac{25k}{64}}{\frac{33\rho SL}{35} + 4M}}.$$

partie III

Exercices supplémentaires vibrations

16 Modèle discret d'un pétrolier soumis à la houle



L'objectif du problème est de modéliser simplement les déformations dynamiques d'un pétrolier sous l'action des vagues. Le pétrolier est constitué d'une partie arrière hébergeant le château surmontant la salle des machines et d'une partie avant contenant les réservoirs à pétrole.

16.1 Modélisation

Inerties

Pour le modèle, le navire est décomposé en quatre compartiments : le compartiment arrière (machines et château) et trois réservoirs à pétrole. Lorsqu'elles ne sont pas chargées de pétrole, les cales sont généralement remplies d'eau de mer et un réservoir plein a une masse identique à celle du compartiment arrière. Ainsi, pour simplifier, les quatre compartiments sont supposés avoir la même

masse M . Comme indiqué par le dessin ci-dessus, les quatre éléments du modèle ont des dimensions identiques et leur centres sont séparés d'une distance L . On suppose que **leur déplacement est seulement vertical** et on note les déplacements mesurés par rapport à la position d'équilibre statique z_1, z_2, z_3 et z_4 . Le vecteur des coordonnées généralisées est noté $\mathbf{z}$.

Calculer l'énergie cinétique T du pétrolier.

Solution

L'énergie cinétique du pétrolier a pour expression

$$T = \frac{1}{2}M (\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2 + \dot{z}_4^2).$$

En déduire la matrice d'inertie $\mathbf{M}$ du système.

Solution

La matrice d'inertie a pour expression

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix}.$$

Raideurs

Les mécanismes qui rappellent le pétrolier à sa position d'équilibre sont de deux natures : la flottabilité et la raideur de la structure.

La flottabilité est liée à la combinaison de la poussée d'Archimède et du poids du navire pour ramener indépendamment les quatre compartiments à leur position d'équilibre ($z_i = 0$). Pour modéliser cet effort de rappel, on affecte à chaque compartiment une raideur notée k . La force de rappel s'écrit pour un compartiment: $F = (\rho_0 V - M)g$ avec :

- $V = S(z + z_0)$ = volume immergé du compartiment (z_0 = Position statique)
- S = section horizontale du compartiment.
- ρ_0 = masse volumique de l'eau de mer.

Quelle est l'expression de k ?

Solution

La force de rappel a pour expression

$$F = (\rho_0 S(z + z_0) - M)g,$$

d'où $k = \rho_0 S g$. Le terme de pesanteur disparaît lorsqu'on utilise la position z mesurée par rapport à la position d'équilibre statique z_0

Écrire l'énergie potentielle de flottabilité des quatre compartiments en fonction de k .

 Solution

L'énergie potentielle de flottabilité des quatre compartiments a pour expression

$$U = \frac{k}{2} (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2).$$

Quelle est la matrice de raideur de flottabilité $\mathbf{K}_f$?

 Solution

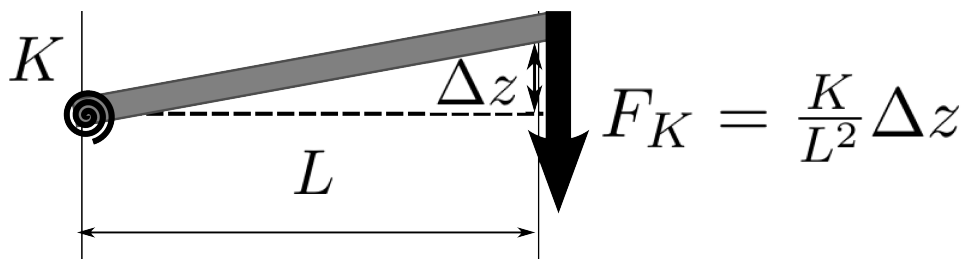
De la question précédente, on déduit rapidement l'expression de la matrice de raideur de flottabilité $\mathbf{K}_f$:

$$\mathbf{K}_f = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Structure

Les caractéristiques élastiques de la structure du navire tendent à ramener l'ensemble dans un état non déformé ($z_i - z_{i+1} = 0$). Pour modéliser cet effort de rappel, on considère un ressort de torsion de raideur K (Nm/rad).

Montrer que la force de rappel induite par un ressort de torsion pour une petite déformation Δz est de la forme indiquée sur la figure ci contre :



💡 Solution

Le couple de torsion est

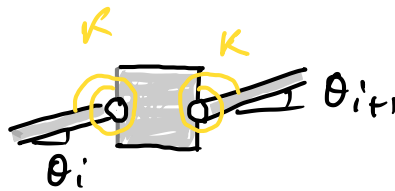
$$\Gamma = K\theta = K \frac{\Delta z}{L} = LF_K,$$

d'où la force de rappel de structure

$$F_K = K \frac{\Delta z}{L^2}.$$

Écrire l'énergie potentielle de structure associée aux ressorts K , selon la figure ci-dessous.

Energie potentielle du pétrolier



$$U = \frac{1}{2} K \theta_{i+1}^2 + \frac{1}{2} K \theta_i^2$$

Figure 16.1: Position des ressorts de torsion sur une masse

💡 Solution

L'énergie potentielle de structure associée aux ressorts K a pour expression

$$\begin{aligned} U &= \frac{K}{2L^2} [(z_1 - z_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_2)^2 + (z_3 - z_4)^2 + (z_3 - z_4)^2] \\ &= \frac{K}{2L^2} [2(z_1 - z_2)^2 + 2(z_2 - z_3)^2 + 2(z_3 - z_4)^2] \\ &= \frac{K}{2L^2} (2z_1^2 + 4z_2^2 + 4z_3^2 + 2z_4^2 - 4z_1z_2 - 4z_2z_3 - 4z_3z_4). \end{aligned}$$

Quelle est la matrice de raideur de structure $\mathbf{K}_s$?

💡 Solution

De la question précédente, on déduit rapidement l'expression de la matrice de raideur de structure $\mathbf{K}_s$:

$$\mathbf{K}_s = \frac{K}{L^2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En l'absence d'amortissement, quelle équation matricielle décrit le mouvement libre du système ?

 Solution

En l'absence d'amortissement, l'équation matricielle qui décrit le mouvement libre du système est

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_f)\mathbf{z} = 0.$$

16.2 Mouvement libre : Modes et fréquences propres

Comment procède-t-on pour identifier les fréquences propres f_j ?

 Solution

On suppose que les solutions de l'équation du mouvement sont harmoniques $z_i(t) = Z_i e^{j\omega t}$, conduisant au système

$$((\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_f) - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{Z} = 0.$$

Il faut s'assurer que les solutions z sont non nulles en résolvant l'équation aux valeurs propres en ω^4 :

$$|(\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_f) - \omega^2 \mathbf{M}| = 0.$$

On obtient 4 valeurs propres, les pulsations propres ω_j . Les fréquences propres sont les fréquences telles que $f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}$.

Comment procède-t-on pour identifier les modes propres associés $\mathbf{Z}_j$?

 Solution

Pour chacune des racines obtenues ω_j on obtient le vecteur propre associé $\mathbf{Z}_j$ en résolvant l'équation :

$$(\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_f) - \omega_j^2 \mathbf{M})\mathbf{Z}_j = 0.$$

Si on considère un pétrolier de 200 000 tonnes, large de 60m et long de 300m, et qu'on donne à la structure une raideur de flexion $K = 10^{11}$ Nm/rad, une résolution numérique du système précédent donne les résultats suivants :

Mode	1	2	3	4
Fréquence propre (Hz)	0.12	0.21	0.34	0.43
$\mathbf{Z}_1$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_4$	
1	1	1	-0.4	
1	0.4	-1	1	
1	-0.4	-1	-1	

Mode	1	2	3	4
	1	-1	1	0.4

Représenter les 4 modes propres.

💡 Solution



Figure 16.2: image

Commenter ces modes en fonction de la fréquence associée et des risques vis à vis de la sécurité du navire.

💡 Solution

- Le mode 1 est un mode de corps rigide (sans déformation élastique), c'est le pompage. Il n'est en rien nuisible au navire. En revanche il est nuisible aux marins sujets au mal de mer !
- Le mode deux induit une petite déformation, mais il ressemble beaucoup au mode de corps rigide de tangage. Il est peu nuisible au navire, mais beaucoup au marin d'eau douce.
- Pour le mode 3, on a une déformation importante, les compartiments centraux vibrant en opposition de phase avec les extrémités. 2 points de rupture possibles. Une houle de 0.34Hz est à éviter. Il faut régler la vitesse du navire pour cela.
- Pour le mode 4, on a une déformation importante, tous les compartiments vibrant en opposition de phase. 3 points de rupture possibles. Une houle de 0.4Hz est à éviter. Il faut régler la vitesse du navire pour cela.

Quelle propriété mathématique vérifient les vecteurs propres ?

💡 Solution

Les vecteurs propres sont orthogonaux.

Mettre en évidence cette propriété pour les vecteurs Z_1 et Z_2 .

 Solution

$$\mathbf{Z}_1^t \mathbf{M} \mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4 \\ -0.4 \\ -1 \end{pmatrix} = M(1 \times 1 + 1 \times 0.4 + 1 \times -0.4 + 1 \times -1) = 0.$$

16.3 Mouvement forcé : Réponse au passage d'un train de houle

La houle est une onde de déplacement engendrée par le vent et se propageant à la surface de la mer sur des très grandes distances. Au passage d'un train de houle, les 4 compartiments subissent chacun un effort vertical F_i .

Calculer la puissance des efforts extérieurs.

 Solution

La puissance des efforts extérieurs a pour expression

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^4 F_i \dot{z}_i.$$

En déduire le vecteur des efforts généralisés $\mathbf{Q}$ en fonction des F_i .

 Solution

Le vecteur des efforts généralisés a pour expression

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}.$$

Écrire l'équation matricielle du mouvement forcé.

 Solution

L'équation matricielle du mouvement forcé a pour expression

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{z}} + (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_f) \mathbf{z} = \vec{Q}.$$

Montrer comment on peut découpler le système dans la base des coordonnées modales notées $\mathbf{p}$.

 Solution

On substitue aux coordonnées généralisées $\mathbf{z}$ les coordonnées modales $\vec{p}$ telles que $\mathbf{z} = \mathbf{Z}\mathbf{p}$. L'équation du mouvement forcé devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{MZ}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{KZ}\mathbf{p} &= \mathbf{Q} \\ \times \mathbf{Z}^t \Leftrightarrow \mathbf{Z}^t \mathbf{MZ}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{Z}^t \mathbf{KZ}\mathbf{p} &= \mathbf{Z}^t \mathbf{Q} \\ \Leftrightarrow \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_p \mathbf{p} &= \mathbf{Z}^t \mathbf{Q} \\ \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p} &= \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{Z}^t \mathbf{Q} \end{aligned}$$

où Δ est la matrice diagonale des valeurs propres.

L'action de la houle est due aux variations locales de la poussée d'Archimède. C'est un phénomène harmonique d'amplitude et de longueur d'onde métriques. Pour une houle de longueur d'onde λ_H , de vitesse relative v_r par rapport au navire, les forces verticales sur chaque compartiment ont une pulsation $\Omega = 2\pi v_r / \lambda_H$ et elles diffèrent seulement par un déphasage φ_i . Pour le compartiment i , situé à la position ℓ_i de l'extrémité du navire, la force due à la houle s'écrit :

$$F_i(t) = F_H e^{2j\pi \frac{\ell_i}{\lambda_H}} e^{j\Omega t} = F_H e^{j(\Omega t + \varphi_i)}.$$

Cette expression est donnée pour information; le seul élément à prendre en compte est que la houle est harmonique de pulsation Ω .

Pour ce cas particulier d'excitation, écrire sous forme matricielle, le système découplé qui donne les coordonnées modales $\vec{p}$ en fonction du vecteur des efforts généralisés $\vec{Q}$.

 Solution

Dans le cas d'une excitation harmonique, la réponse est harmonique de même pulsation Ω . La résolution de l'équation du mouvement dans la base modale conduit à l'expression

$$\vec{p} = (\Delta - \Omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{Z}^t \vec{Q}.$$

Quelle opération matricielle écrit-on pour obtenir les mouvements réels $\mathbf{z}$ du navire en fonction de la pulsation Ω ?

 Solution

On a

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}\vec{p}(t).$$

Si on introduit de l'amortissement dans le système, à quelle condition la base modale $\mathbf{Z}$ permet-elle toujours une résolution simple du système ?

 Solution

Il faut que la matrice de dissipation vérifie la relation de Caughey : $\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$. C'est le cas par exemple de l'amortissement proportionnel, lorsque $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$. On conserve alors des équations découplées dans la base modale.

Pour ce type d'amortissement et pour les excitations harmoniques, écrire l'expression matricielle qui donne les coordonnées modales $\vec{p}$ en fonction du vecteur des efforts généralisés $\vec{Q}$.

 Solution

Une matrice de ce type procure une matrice principale de dissipation diagonale $\mathbf{C}_p$. Dans le cas de l'excitation harmonique, les coordonnées modales sont alors obtenues par l'opération :

$$\vec{p} = (\mathbf{K}_p + j\Omega\mathbf{C}_p - \Omega^2\mathbf{M}_p)^{-1}\mathbf{Z}^t\vec{Q}.$$

partie IV

Exercices ondes

17 La corde vibrante : ondes

Le but de cet exercice est d'étudier la propagation d'ondes dans une corde tendue. Nous allons étudier différentes configurations :

- corde infinie,
- corde fixée à ses extrémités,
- propagation dans plusieurs cordes de masses linéiques différentes accrochées ensemble.

On s'intéresse au déplacement transverse de la corde $y(x, t)$ au point x et à l'instant t . On note T la tension et la μ masse linéique. Avec ces notations, le déplacement transverse satisfait à l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

avec $c_0 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

- (1) On suppose que la corde est de longueur infinie. Montrer que la solution générale de l'équation des ondes est alors :

$$y(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

où f et g sont deux fonctions scalaires.

- (2) Donner une interprétation physique des termes $f(x - c_0 t)$ et $g(x + c_0 t)$.
- (3) On suppose qu'à $t = 0$, le profil de la corde est celui de la Figure 17.1, on suppose aussi que $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0$. Tracer la forme de la corde pour $t > 0$.
- (4) On suppose maintenant que la corde est fixée à ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$. On suppose que les ondes se propageant vers les $x > 0$ se réfléchissent parfaitement en $x = L$ et que les ondes se propageant vers les $x < 0$ se réfléchissent parfaitement en $x = 0$. On a alors $f(\alpha) = g(\alpha) = A \sin(k_0 \alpha)$. Dans ce cas montrer que :

$$y(x, t) = f(x) \phi(t)$$

D'après la forme de la solution, de quel type de phénomène s'agit-il ?

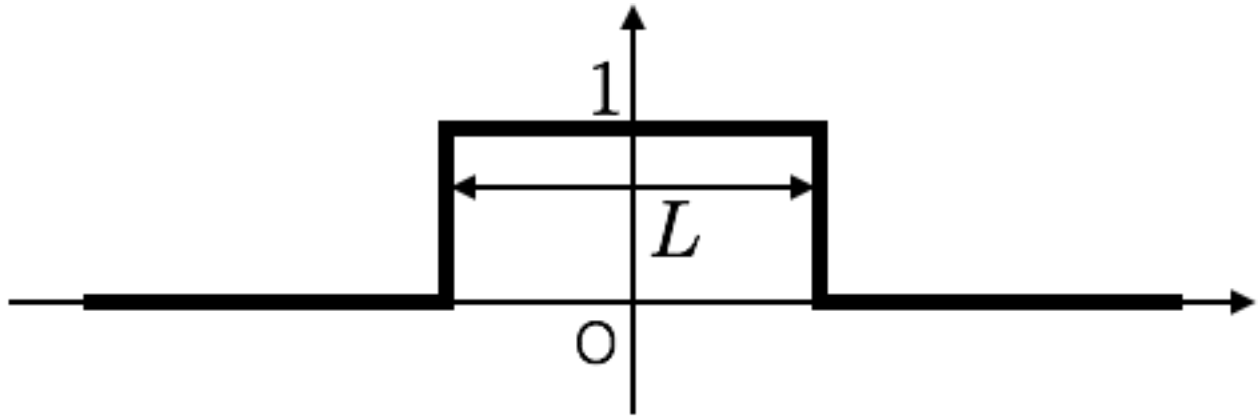


Figure 17.1: Profil de la corde à $t = 0$

- (5) On considère une situation dans laquelle, deux cordes de masses linéiques différentes μ_1 et μ_2 sont couplées en $x = 0$ (cf Figure 17.2).

On suppose que le déplacement transverse $y(x, t)$ et la pente de la corde $\partial y / \partial x$ sont des grandeurs continues en $x = 0$.

Un exciteur permet de générer une onde incidente dans la corde 1 de la forme :

$$y_I(x, t) = A \exp(i(k_1 x - \omega t))$$

On observe qu'une partie de l'onde se réfléchit en $x = 0$ et qu'une autre partie est transmise. On note R et T les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude. Déterminer ces coefficients en fonction des données physiques du problème.

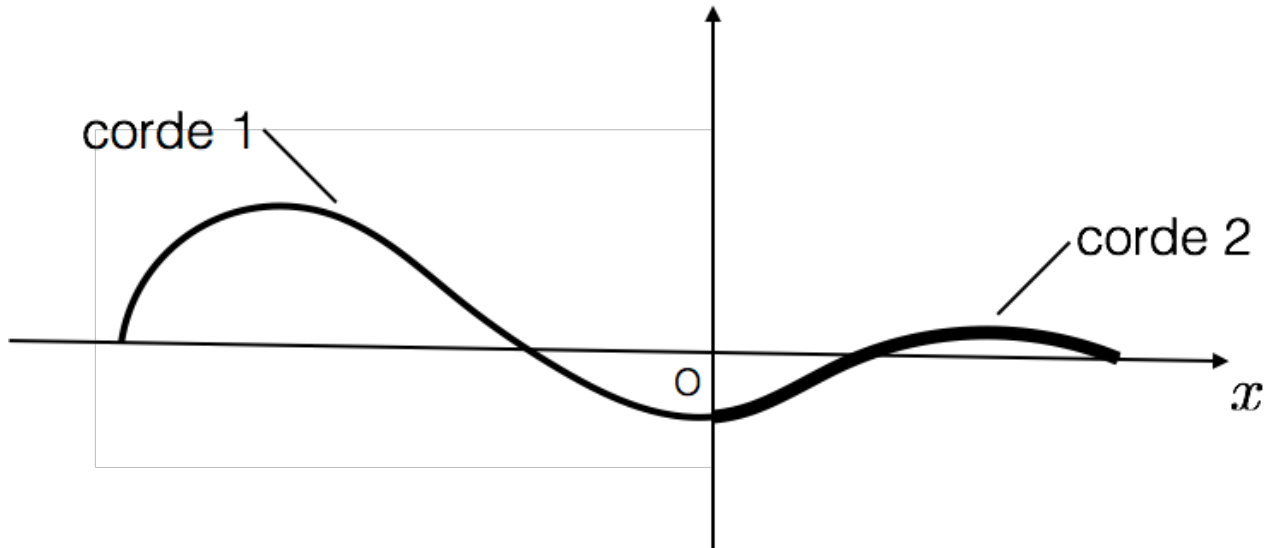


Figure 17.2: Cordes de masses linéiques différentes assemblées en $x = 0$

- (6) On considère maintenant une situation avec 3 cordes de masses linéiques μ_1, μ_2 et μ_3 (avec $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$) telle que la corde 2 soit comprise entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$ (la corde 1 est du côté des $x < 0$). Comme pour la question précédente, on suppose qu'un excitateur permet de générer une onde incidente dans la corde 1 :

$$y_I(x, t) = A \exp(i(k_1 x - \omega t))$$

On note R_1 le coefficient de reflexion en amplitude dans la corde 1 et R_2 celui dans la corde 2. On note T_2 le coefficient de reflexion en amplitude dans la corde 2 et T_3 celui dans la corde 3.

Montrer qu'on peut choisir les propriétés physiques de la corde 2 (L et μ_2) pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchi à l'interface entre les cordes 1 et 2 :

- $R_1 = 0$
- $L = \lambda_2/4$
- $\mu_2 = \sqrt{\mu_1 \mu_3}$

17.1 Equation de dispersion de plusieurs types d'ondes

Pour chacune des équations ci-dessous calculer la relation de dispersion et la vitesse de phase.

1. la propagation des ondes dans une corde est modélisée par l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

2. la propagation des ondes dans une corde avec amortissement peut être modélisée par l'équation de Klein-Gordon linéarisée :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \beta^2 y = 0$$

3. la propagation d'ondes de grandes longueurs d'ondes en eau peu profonde peut être modélisée par l'équation de Korteweg de Vries linéarisée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

4. la propagation d'ondes de flexion dans les poutres (selon Euler-Bernoulli) est donnée par:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c_0^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0$$

💡 Solution corde

17.1.0.1 Solution générale de l'équation de d'Alembert

On fait le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned}\xi &= x - c_0 t \\ \eta &= x + c_0 t.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \eta} = -c_0 \frac{\partial y}{\partial \xi} + c_0 \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= c_0^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \right) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \right)\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation des ondes, on obtient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

D'abord, intégrons cette relation par rapport à η :

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = h(\xi)$$

Ensuite, intégrons par rapport à η :

$$y(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

avec $f(\xi)$ la primitive de $h(\xi)$.

Finalement, on a donc:

$$y(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

17.1.0.2 Interprétation physique

Onde progressive, onde rétrograde.

17.1.0.3 Conditions initiales

On note $y_0(x) = y(x, t = 0)$. A $t = 0$, on a :

$$y(x, 0) = y_0(x) = f(x) + g(x)$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0 \Leftrightarrow c_0(f'(x) - g'(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + D$$

Par conséquent :

$$y_0(x) = 2g(x) + D$$

et donc

$$g(x) = \frac{y_0(x) - D}{2}, \quad f(x) = \frac{y_0(x) + D}{2}$$

En remplaçant dans $y(x, t)$, on a

$$\begin{aligned} y(x, t) &= f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \\ &= \frac{y_0(x - c_0 t) + D}{2} + \frac{y_0(x + c_0 t) - D}{2} \\ &= \frac{1}{2}(y_0(x - c_0 t) + y_0(x + c_0 t)) \end{aligned}$$

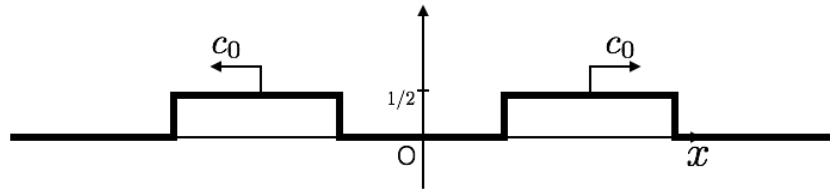


Figure 17.3: Corde au temps t

17.1.0.4 Onde stationnaire

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A (\sin(k_0(x - c_0 t)) + \sin(k_0(x + c_0 t))) \\ &= A (\sin(k_0 x) \cos(k_0 c_0 t) - \cos(k_0 x) \sin(k_0 c_0 t) + \sin(k_0 x) \cos(k_0 c_0 t) + \cos(k_0 x) \sin(k_0 c_0 t)) \\ &= 2A (\sin(k_0 x) \cos(\omega_0 t)) \end{aligned}$$

La solution du problème est donc une solution à variables séparées. Cette solution est celle que nous avons utilisée en vibrations. Nous sommes en présence d'un phénomène de vibrations : le temps d'observation est plus grand que le temps de parcours des ondes dans la structure. On voit un exemple concret de transition entre ondes et vibrations.

17.1.0.5 Corde hétérogène

Dans ce problème, on a 2 cordes avec 2 vitesses de propagation différentes : $c_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$ et $c_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$ La solution dans la corde 1 s'écrit :

$$y_1(x, t) = Y_I(x, t) + y_R(x, t) = A \exp(i(k_1 x - \omega t)) + AR \exp(i(-k_1 x - \omega t))$$

La solution dans la corde 2 s'écrit :

$$y_2(x, t) = Y_T(x, t) = AT \exp(i(k_2 x - \omega t))$$

Le déplacement transverse est continu en $x = 0$:

$$y_1(x = 0, t) = y_2(x = 0, t)$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} A \exp(i(-\omega t)) + AR \exp(i(-\omega t)) &= AT \exp(i(-\omega t)) \\ 1 + R &= T \end{aligned}$$

La pente est continue en $x = 0$:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}(x = 0, t) = \frac{\partial y_2}{\partial x}(x = 0, t)$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} ik_1 A \exp(i(-\omega t)) - ik_1 AR \exp(i(-\omega t)) &= ik_2 AT \exp(i(-\omega t)) \\ (1 - R)k_1 &= Tk_2 \end{aligned}$$

avec $k_1 = \omega/c_1$ et $k_2 = \omega/c_2$. On a donc deux équations et deux inconnues à résoudre :

$$\begin{aligned} 1 + R &= T \\ (1 - R) \frac{c_2}{c_1} &= T \end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\begin{aligned} R &= \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2} \\ T &= \frac{2c_2}{c_1 + c_2} \end{aligned}$$

On remarque que quand $c_1 = c_2$ il n'y a pas de réflexion et le coefficient de transmission en amplitude est égal à 1.

17.1.0.6 Corde triple

Les solutions dans les cordes 1, 2 et 3 sont :

$$\begin{aligned}y_1(x, t) &= Ae^{i(k_1x - \omega t)} + AR_1e^{i(-k_1x - \omega t)} \\y_2(x, t) &= AT_2e^{i(k_2x - \omega t)} + AR_2e^{i(-k_2x - \omega t)} \\y_3(x, t) &= AT_3e^{i(k_3x - \omega t)}\end{aligned}$$

La condition de continuité du déplacement et de la pente en $x = 0$ permet de déterminer deux équations :

$$\begin{aligned}1 + R_1 &= T_2 + R_2 \\(1 - R_1)k_1 &= (T_2 - R_2)k_2\end{aligned}$$

La condition de continuité du déplacement et de la pente en $x = L$ permet de déterminer deux autres équations :

$$\begin{aligned}T_2e^{ik_2L} + R_2e^{-ik_2L} &= T_3e^{ik_3L} \\k_2T_2e^{ik_2L} - k_2R_2e^{-ik_2L} &= T_3k_3e^{ik_3L}\end{aligned}$$

Après résolution de ces 4 équations à 4 inconnues (R_1, R_2, T_2 et T_1), on impose $R_1 = 0$. On trouve alors la condition :

$$e^{i2k_2L} = \frac{(c_1 - c_2)(c_3 + c_2)}{(c_1 + c_2)(c_3 - c_2)}$$

On remarque que l'hypothèse $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$ implique $c_1 > c_2 > c_3$, donc $\frac{(c_1 - c_2)(c_3 + c_2)}{(c_1 + c_2)(c_3 - c_2)} < 0$.

Une solution possible est de s'arranger pour que $\frac{(c_1 - c_2)(c_3 + c_2)}{(c_1 + c_2)(c_3 - c_2)} = -1$. On a alors $e^{i2k_2L} = -1$. Les conséquences de ce choix sont :

- $2k_2L = \pi$ donc $L = \lambda_2/4$ (rappel $\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2}$)
- $\frac{(c_1 - c_2)(c_3 + c_2)}{(c_1 + c_2)(c_3 - c_2)} = -1$ donc $c_2 = \sqrt{c_1 c_3}$.

Solution dispersion

17.1.0.7 Équation de d'Alembert

On cherche la solution sous la forme :

$$\begin{aligned}y(x, t) &= Ae^{i(\omega t - kx)} \\ \frac{1}{c_0^2} A(i\omega)^2 e^{i(\omega t - kx)} - A(-ik)^2 e^{i(\omega t - kx)} &= 0 \\ -\frac{1}{c_0^2} \omega^2 + k^2 &= 0\end{aligned}$$

La relation de dispersion associée à cette équation est donc : $-\frac{1}{c_0^2}\omega^2 + k^2 = 0$.

La vitesse de phase est $c_\phi = \frac{\omega}{k} = \pm c_0$. On constate que les ondes se propageant dans la corde le font à une vitesse constante quelle que soit la fréquence. Elles ne sont pas dispersives.

17.1.0.8 Klein-Gordon linéarisée

On cherche la solution sous la forme :

$$y(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{1}{c_0^2}A(i\omega)^2 e^{i(\omega t - kx)} - A(-ik)^2 e^{i(\omega t - kx)} + A\beta^2 e^{i(\omega t - kx)} = 0$$

$$-\frac{1}{c_0^2}\omega^2 + k^2 + \beta^2 = 0$$

La relation de dispersion associée à cette équation est donc : $-\frac{1}{c_0^2}\omega^2 + k^2 + \beta^2 = 0$ ou encore : $\omega = \pm c_0 \sqrt{k^2 + \beta^2}$

La vitesse de phase est $c_\phi = \frac{\omega}{k} = \pm c_0 \frac{\sqrt{k^2 + \beta^2}}{k} = \pm c_0 \sqrt{1 + \beta^2/k^2}$. Ces ondes sont dispersives. On rappelle que $k = 2\pi/\lambda$, cela implique que les ondes de grandes longueurs d'ondes se propagent plus vite que les petites longueurs d'ondes (quand $k \rightarrow +\infty$, $\lambda \rightarrow 0$ et $c_\phi \rightarrow c_0$ et quand $k \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$ et $c_\phi > c_0$)

KdV

On cherche la solution sous la

forme : $u(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$

$$A(i\omega)e^{i(\omega t - kx)} - A\alpha i k e^{i(\omega t - kx)} - A\beta(-ik)^3 e^{i(\omega t - kx)} = 0$$

$$\omega - \alpha k - \beta k^3 = 0$$

La relation de dispersion

associée à cette équation est

donc : $\omega = \alpha k + \beta k^3$.

La vitesse de phase est

$$c_\phi = \frac{\omega}{k} = \alpha + \beta k^2.$$

On constate que les ondes ne se

propagent que vers les x

croissants. Ces ondes sont

dispersives. On rappelle que

$k = 2\pi/\lambda$, cela implique que les

petites longueurs d'ondes (les

vagues les plus rapprochées) se

propagent plus vite que les

grandes longueurs d'ondes

17.1.0.9 Poutre d'Euler-Bernoulli

On cherche $v(x, t) = A \exp(i(kx - \omega t))$, en injectant dans l'équation, on obtient:

$$\begin{aligned} -\omega^2 A \exp(i(kx - \omega t)) + c_0^2 k^4 A \exp(i(kx - \omega t)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega^2 &= c_0^2 k^4 \\ \Leftrightarrow \omega &= \pm c_0 k^2 \end{aligned}$$

On a alors :

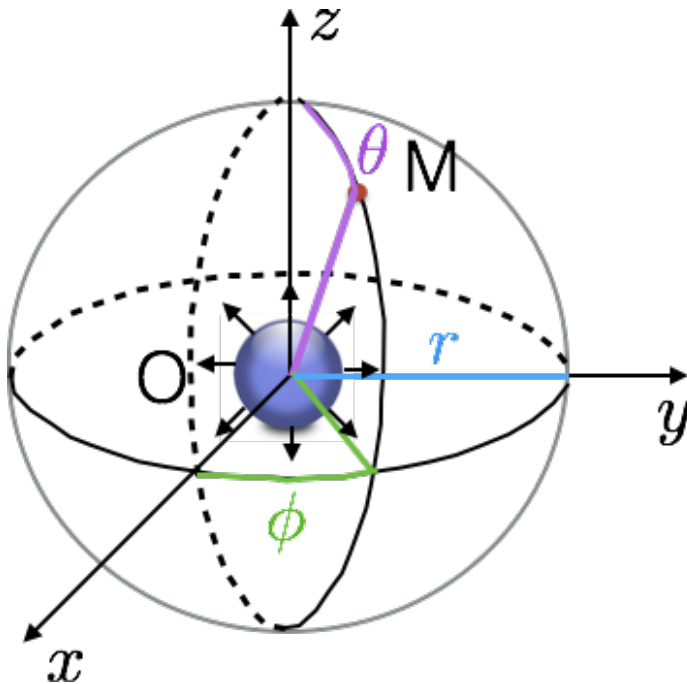
$$\begin{aligned} c_\phi &= \frac{\omega}{k} = c_0 k \\ c_g &= \frac{d\omega}{dk} = 2c_0 k \end{aligned}$$

18 Ondes acoustiques

18.1 Onde sphérique

Dans ce problème, on cherche à déterminer le champ acoustique émis par une sphère vibrante. On considère pour cela une sphère de rayon a et on suppose qu'elle vibre radialement à la fréquence f_0 avec une vitesse V_0 . On considère un repère placé au centre de la sphère. La sphère vibre dans l'air, milieu supposé homogène et isotrope. On note ρ_0 la masse volumique du milieu et c_0 la vitesse du son. On rappelle l'expression de l'opérateur laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$



$$\phi \in [0 : 2\pi[$$

$$\theta \in [0 : \pi]$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

Figure 18.1: Sphère pulsante et coordonnées sphériques

1. Ecrire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la pression au point d'écoute M de coordonnées (r, θ, ϕ) .

2. Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 r p_a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 r p_a}{\partial r^2} = 0$$

3. Montrer que la solution de cette équation s'écrit :

$$p_a(r, t) = \frac{1}{r} f(r - c_0 t) + \frac{1}{r} g(r + c_0 t)$$

4. Quelle est la signification physique des deux termes de cette solution ?

5. La sphère émet une impulsion à $t = 0$ d'amplitude A . Tracer qualitativement la pression $p_a(r, t)$ pour $t = 0$, $t_1 > 0$ et $t_2 > t_1$.

6. On suppose que la sphère vibre de façon harmonique. La vitesse de vibration radiale, en notation complexe, s'écrit donc : $V_s(t) = V_0 \exp(-i\omega_0 t)$. En utilisant les conditions limites du problème, montrer que la pression s'écrit :

$$p_a(r, t) = \frac{A}{r} \exp(i(k_0 r - \omega_0 t))$$

avec A une constante que l'on déterminera par la suite.

7. Identifier la constante A .

8. Le niveau de pression en dB est défini par :

$$L = 10 \log \left(\frac{p_{\text{moy}}^2}{p_{\text{ref}}^2} \right)$$

où $p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa et le terme p_{moy} désigne la pression moyenne :

$$p_{\text{moy}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p(t)^2 dt}$$

avec T la période de l'onde (ou la période d'observation). Calculer la pression moyenne p_{moy} à la distance r pour une onde sphérique (on prendra : $p_a(r, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega_0 t)$).

9. Que vaut alors le niveau en dB en fonction de la distance r ?

10. On donne $A = 28$ Pa·m, calculer le niveau en dB à 1 m de la source.

11. Montrer que le niveau en dB peut s'écrire :

$$L(r) = L(1 \text{ m}) - 20 \log \left(\frac{r}{1 \text{ m}} \right)$$

12. Que vaut la pression en $r = 2$ m, $r = 10$ m, $r = 10000$ m, commenter la pertinence physique de ces résultats.

18.2 Réflexion totale - onde plane inhomogène

Nous avons vu dans le cours, qu'une onde acoustique incidente à l'interface entre 2 fluides (ayant comme impédance $Z_1 = \rho_1 c_1$ et $Z_2 = \rho_2 c_2$) donne une onde réfléchie et une onde transmise. Selon les cas, il existe un angle d'incidence critique θ_{cr} au-delà duquel, il ne peut pas y avoir d'onde plane transmise (l'angle de transmission n'est alors plus défini) on dit alors qu'il y a réflexion totale. Cela veut-il pour autant dire qu'aucune onde n'est transmise à travers l'interface ? Pour répondre à cette question, nous allons étudier cette situation.

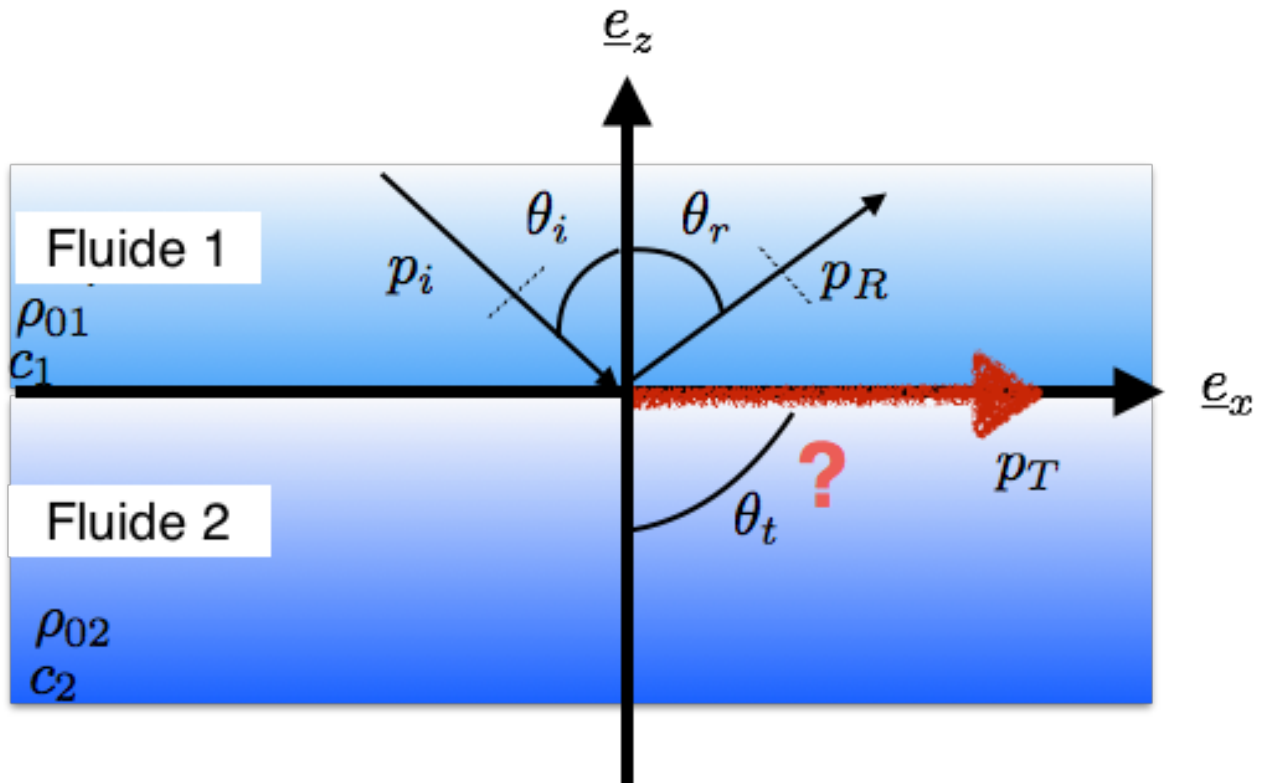


Figure 18.2: Transmission d'une onde à une incidence critique

1. Rappeler les lois de Snell-Descartes.
2. Faire une figure schématisant la réflexion/transmission d'une onde à l'interface entre 2 fluides pour $c_2 < c_1$ et $c_2 > c_1$. Dans quel cas l'angle θ_t peut-il ne pas être défini ? Que vaut alors l'angle critique.
3. D'après les lois de Snell-Descartes, la composante horizontale du nombre d'onde est la même pour les ondes incidentes, réfléchies et transmises. Par conséquent, on a la relation suivante : $k_{tx} = k_{ix} = \frac{\omega}{c_1} \sin \theta_i$, en déduire la composante suivant z du vecteur d'onde $\underline{k}_t$ dans le cas où $\theta_i > \theta_{cr}$.
4. Montrer que l'onde plane transmise dans le milieu 2 peut s'écrire :

$$p_t = T A \exp(z/\delta) \exp[i(k_x x - \omega t)],$$

Donner une interprétation physique de δ et de l'onde obtenue.

5. Calculer les coefficients R et T au-delà de l'angle critique.

6. Vérifier alors que $|R| = 1$.

Solution onde sphérique

18.2.0.1 Équation d'onde

L'équation des ondes à 3D s'écrit :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = 0$$

On remplace le Laplacien par son expression en coordonnées sphériques on obtient :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) p_a = 0$$

Le problème est à géométrie sphérique (milieu et source), par conséquent les dérivées par rapport à θ et ϕ sont nulles :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p_a}{\partial r} \right) = 0$$

18.2.0.2 Équation factorisée

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p_a}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left(2r \frac{\partial p_a}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 p_a}{\partial r^2} \right) \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r p_a}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r p_a}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(p_a + r \frac{\partial p_a}{\partial r} \right) \\ &= 2 \frac{\partial p_a}{\partial r} + r \frac{\partial^2 p_a}{\partial r^2} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 r p_a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 r p_a}{\partial r^2} = 0$$

18.2.0.3 Solution de l'équation

On remarque que cette équation est l'équation des ondes 1D dont on connaît la solution :

$$rp_a = f(r - c_0 t) + g(r + c_0 t)$$

Par conséquent :

$$p_a(r, t) = \frac{1}{r}f(r - c_0 t) + \frac{1}{r}g(r + c_0 t)$$

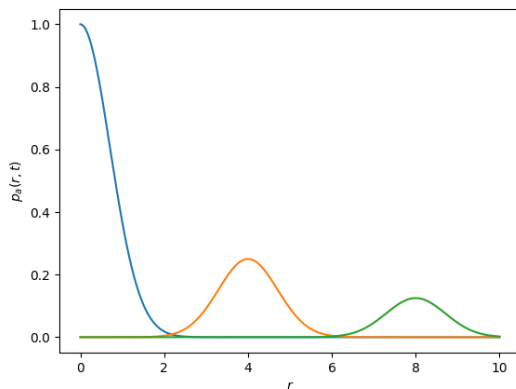
18.2.0.4 Interprétation physique

Le premier terme $f(r - c_0 t)$ est une onde divergente (qui se propage vers les r croissants). L'amplitude de ce terme décroît en $1/r$.

Le deuxième terme $g(r + c_0 t)$ est une onde convergente (qui se propage vers les r décroissants). L'amplitude de ce terme croît en $1/r$. Potentiellement, il y a donc une singularité en $r = 0$. En fait, ce problème n'en n'est pas un dans notre cas puisque la sphère est située en $r = 0$ avec un rayon a .

18.2.0.5 Impulsion

Dans cette configuration, seul le terme correspondant aux ondes divergente est à considérer dans la solution. La solution est tracée sur la figure suivante :



18.2.0.6 Vibration de la sphère

On ne considère que les ondes divergentes produites par la sphère :

$$p_a(r, t) = \frac{1}{r}f(r - c_0 t)$$

En se servant de la conservation de quantité de mouvement à la surface de la sphère, on peut écrire:

$$\rho_0 \frac{\partial V_s}{\partial t} = -\nabla p(a, t) \cdot \mathbf{e}_r$$

Le terme à gauche de l'équation donne :

$$\rho_0 \frac{\partial V_s}{\partial t} = -i\omega_0 \rho_0 V_0 e^{-i\omega_0 t}.$$

Le terme à droite donne

$$-\nabla p(a, t) \cdot \mathbf{e}_r = -\frac{\partial p}{\partial r}(a, t) = \frac{1}{a^2} f(a - c_0 t) - \frac{1}{a} f'(a - c_0 t)$$

Pour faciliter l'identification de f , on pose le changement de variable

$$\begin{aligned} x &= a - c_0 t \\ t &= \frac{a - x}{c_0} \end{aligned}$$

On a donc l'équation suivante:

$$\begin{aligned} -i\omega_0 \rho_0 V_0 e^{-i\frac{\omega_0}{c_0}(a-x)} &= \frac{1}{a^2} (f(x) - a f'(x)) \\ \Leftrightarrow a f'(x) - f(x) &= i a^2 \omega_0 \rho_0 V_0 e^{-ik_0 a} e^{ik_0 x} \end{aligned}$$

On en déduit une solution particulière de la forme $f(x) = A e^{ik_0 x}$, et

$$p(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(k_0 r - \omega_0 t)}$$

18.2.0.7 Identification de la constante

En remplaçant $f(x) = A e^{ik_0 x}$ dans l'équation ordinaire, on trouve :

$$A = \frac{i a^2 \omega_0 \rho_0 V_0 e^{-ik_0 a}}{i a k_0 - 1}$$

18.2.0.8 Pression moyenne

On utilise l'écriture de la pression sous forme réelle : $p_a(r, t) = \text{Re}(A/r \exp(i(kr - \omega_0 t)))$ obligatoire pour un calcul propre.

$$\begin{aligned}
p_{\text{moy}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p(t)^2 dt} \\
&= \sqrt{\frac{A^2}{Tr^2} \int_0^T \cos^2(kr - \omega_0 t) dt} \\
&= \sqrt{\frac{A^2}{Tr^2} \int_0^T \frac{1 + \cos(2(kr - \omega_0 t))}{2} dt} \\
&= \frac{A}{\sqrt{2}r}
\end{aligned}$$

18.2.0.9 Intensité sonore

On reporte la solution de la question précédente dans la définition des dB:

$$L = 20 \log \left(\frac{A}{\sqrt{2} r p_{\text{ref}}} \right)$$

$$L(r = 1\text{ m}) = 20 \log \left(\frac{28\text{ Pa} \cdot \text{m}}{\sqrt{2} \times 1\text{ m} \times 2 \cdot 10^{-5}\text{ Pa}} \right) \approx 20 \log \left(\frac{28}{2.8 \cdot 10^{-5}} \right) = 20 \log(10^6) = 120\text{ dB}$$

En utilisant les propriétés sur les logs, on trouve directement :

$$\begin{aligned}
L &= 20 \log \left(\frac{A}{\sqrt{2} r p_{\text{ref}}} \right) \\
&= 20 \log \left(\frac{A}{\sqrt{2} p_{\text{ref}} \times 1\text{ m}} \cdot \frac{1\text{ m}}{r} \right) \\
&= L(1\text{ m}) + 20 \log \left(\frac{1\text{ m}}{r} \right) \\
&= L(1\text{ m}) - 20 \log \left(\frac{r}{1\text{ m}} \right)
\end{aligned}$$

Pour ces applications numériques, il suffit de se rappeler que $\log(2) \approx 0.3$:

$$L(2\text{ m}) = 120 - 6 = 114\text{ dB}$$

$$L(10\text{ m}) = 120 - 20 = 100\text{ dB}$$

$$L(10^5\text{ m}) = 120 - 80 = 40\text{ dB}$$

On constate qu'on ne percevra plus la source à une distance de 10^6 m , ce qui est un peu loin. Plusieurs éléments n'ont pas été pris en compte dans notre modèle simplifié tel que l'absorption.

💡 Solution réflexion totale

18.2.0.10 Snell-Descartes

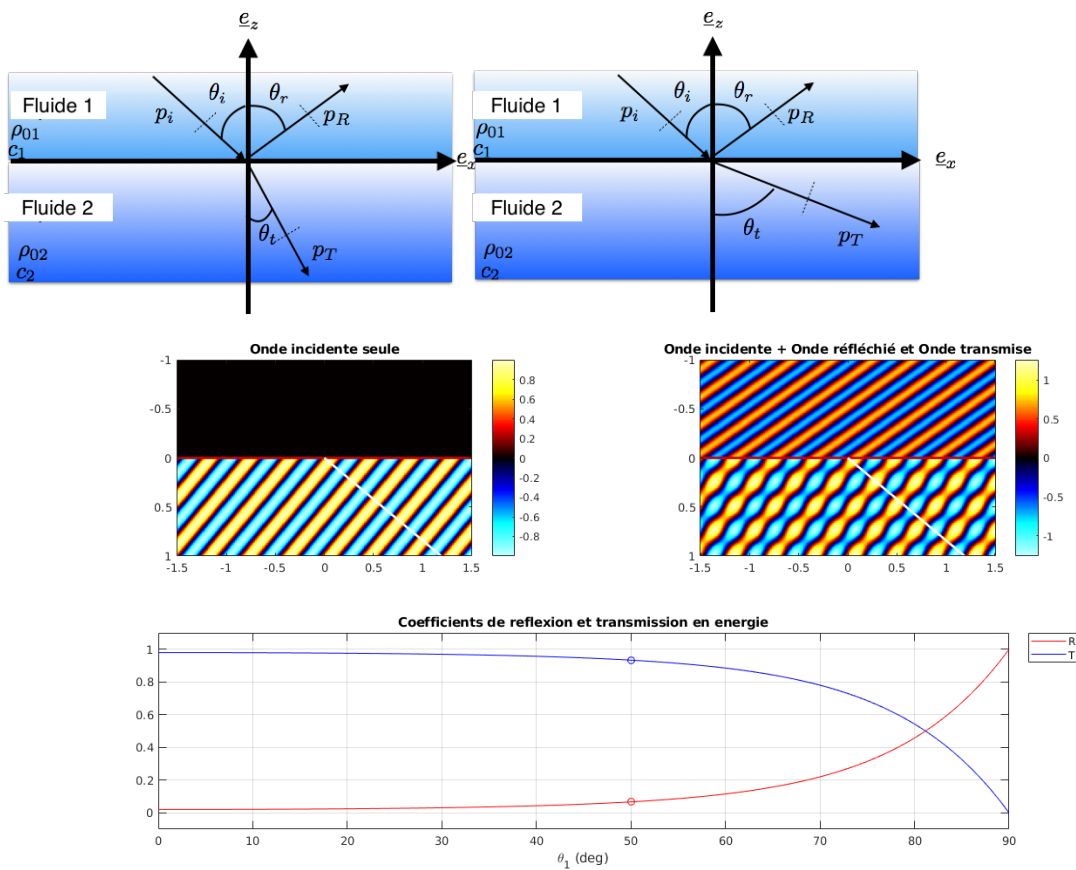
Les angles de l'onde incidente et de l'onde réfléchie sont égaux :

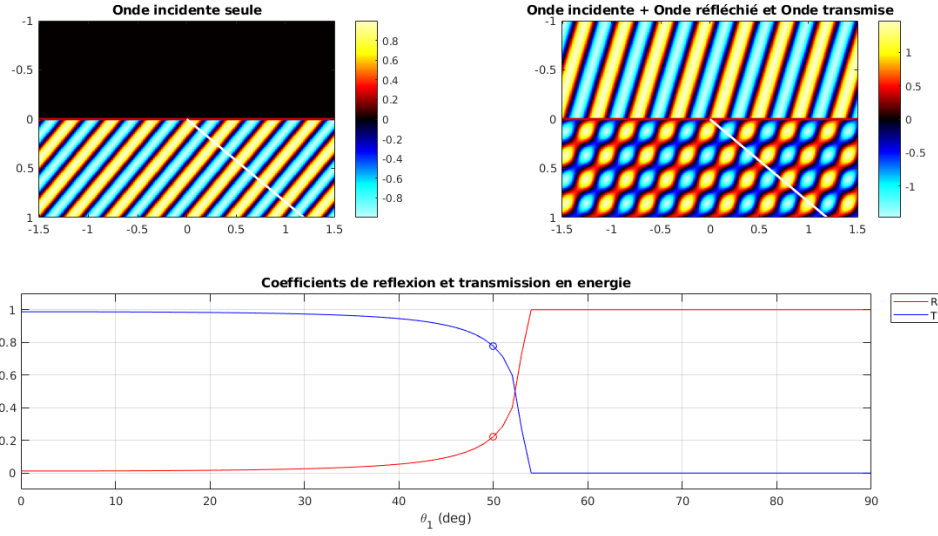
$$\theta_i = \theta_r = \theta$$

par ailleurs :

$$\frac{\sin \theta}{c_1} = \frac{\sin \theta_t}{c_2}$$

18.2.0.11 Angle critique





L'angle θ_t peut ne pas être défini dans le cas $c_2 > c_1$. On appelle angle critique θ_{cr} , l'angle d'incidence tel que l'angle de l'onde transmise soit égal à $\pi/2$: $\theta_i = \theta_{cr}$ si $\theta_t = \pi/2$ dans ce cas l'angle critique vaut :

$$\theta_{cr} = \arcsin\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$

On a donc une onde transmise seulement si $\theta_i < \theta_{cr}$.

18.2.0.12 Vecteur d'onde selon z

Les relations de dispersion dans les milieux 1 et 2 sont $\frac{\omega}{k_1} = c_1$ et $\frac{\omega}{k_2} = c_2$. Par ailleurs : $\underline{k} = k_x \underline{e}_x + k_z \underline{e}_z$. On en déduit :

$$k_{tz}^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - \frac{\omega^2}{c_1^2} \sin^2 \theta_i = \frac{\omega^2}{c_2^2} \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \theta_i\right)$$

Dans le cas où $\theta_i > \theta_{cr}$, alors :

$$\frac{c_2}{c_1} \sin \theta_i > 1,$$

ce qui entraîne d'après la relation [eq:k2] que le carré de la composante suivant z du vecteur d'onde de l'onde transmise est négatif : $k_{tz}^2 < 0$, c'est à dire que la composante verticale du vecteur $\underline{k}_t$ est imaginaire pur. Il existe deux solutions admissibles :

$$k_{tz} = \pm i \frac{\omega}{c_2} \sqrt{\frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \theta_i - 1} = \pm i \alpha,$$

18.2.0.13 Onde évanescente

La pression acoustique transmise est :

$$p_t = T A \exp[\mp \alpha z] \exp[i(k_x x - \omega t)].$$

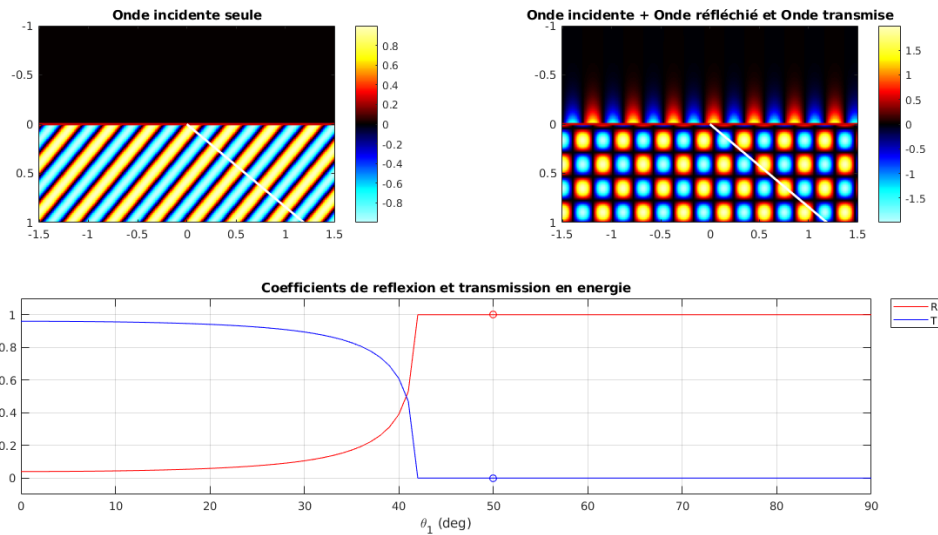
La première solution (signe "-") est exponentiellement croissante lorsque l'on pénètre dans le milieu 2 ($z \rightarrow -\infty$), alors que la seconde (signe "+") est exponentiellement décroissante. Seule cette dernière est physiquement acceptable. On peut encore l'écrire :

$$p_t = T A \exp(z/\delta) \exp[i(k_x x - \omega t)],$$

où δ a la dimension d'une distance : c'est la distance caractéristique sur laquelle l'onde décroît exponentiellement :

$$\delta = \frac{c_2}{\omega} \left(\frac{\sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_{cr}} - 1 \right)^{-1/2}.$$

Ce type d'onde est appelé onde plane inhomogène.



Par opposition à l'onde plane progressive, l'onde plane inhomogène se propage dans la direction Ox , avec une amplitude exponentiellement décroissante dans la direction $z < 0$

L'onde est évanescente dans la direction verticale.

L'influence de la perturbation acoustique créée par une telle onde est donc restreinte au voisinage de l'interface, sur une épaisseur de l'ordre de δ .

18.2.0.14 Coefficients de réflexion et transmission

Le calcul est analogue à celui effectué dans les autres cas, mais il faut utiliser les expressions qui font intervenir les vecteurs d'onde à la place de celles faisant intervenir les angles. Les

vecteurs d'ondes sont :

$$\begin{aligned}k_{iz} &= -\omega/c_1 \cos \theta_i, \\k_{tz} &= i\alpha.\end{aligned}$$

Par conséquent, les coefficients de réflexion et de transmission sont :

$$R = \frac{\cos \theta_i + i \frac{Z_1}{Z_2} \frac{c_2}{\omega} \alpha}{\cos \theta_i - i \frac{Z_1}{Z_2} \frac{c_2}{\omega} \alpha},$$

$$T = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i - i \frac{Z_1}{Z_2} \frac{c_2}{\omega} \alpha}.$$

19 Principe de fonctionnement de la sismique réfraction

L'objectif du problème est de poser les bases d'une méthode très utilisée en sismologie : la sismique réfraction. Cette méthode permet de retrouver les vitesses de propagation des ondes longitudinales et l'épaisseur des couches d'un sol composé de plusieurs couches de matériaux homogènes (supposés être des solides élastiques homogènes et isotropes caractérisés par leur masse volumique ρ_i et leurs coefficients de Lamé λ_i et μ_i avec i l'indice de la couche).

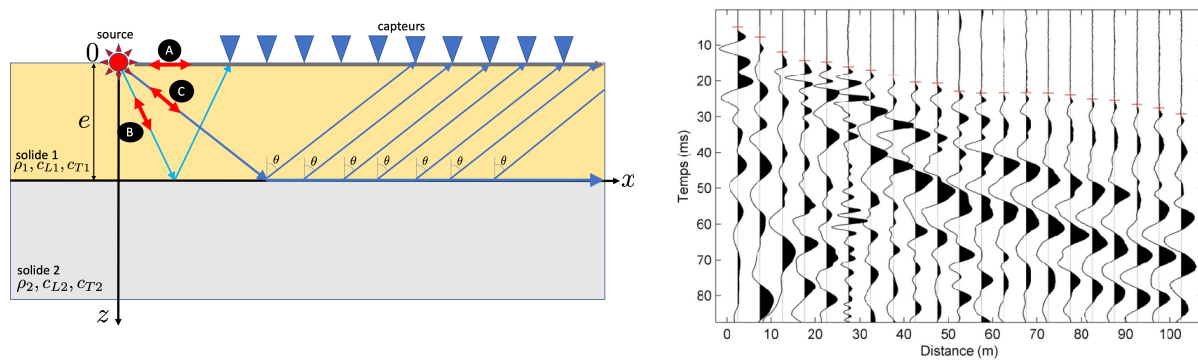


Figure 19.1: (A gauche) Illustration des principaux chemins de propagation entre une source et un réseau de capteurs sismiques pour une onde longitudinale dans une configuration à 2 couches pour la technique de sismique réfraction. (A droite) signaux sismiques reçus par les capteurs.

La Figure 19.1 présente 3 chemins de propagation pour une onde longitudinale émise par une source et reçue par un réseau de capteurs dans une configuration à 2 couches (e est l'épaisseur de la première couche) :

- A le chemin de l'onde directe qui va directement de la source au capteur en se propageant en ligne droite dans le solide 1,
- B le chemin de l'onde réfléchie qui est l'onde émise par la source qui s'est propagée dans le solide 1 puis s'est réfléchi sur l'interface solide 1 / solide 2 et s'est ensuite propagée jusqu'aux capteurs,
- C le chemin de l'onde dite de réfraction qui correspond à l'onde émise à l'angle critique qui se propage d'abord dans le solide 1 puis à la surface du solide 2 avant de rayonner à nouveau dans le solide 1 jusqu'aux capteurs.

La sismique réfraction est basée sur la mesure du temps de propagation du premier signal reçu par chaque capteur. Dans le problème, nous allons montrer que suivant la position du capteur (notée x) la première onde reçue peut avoir suivi le chemin A, B ou C.

1. Etablir l'équation de Lamé-Navier :

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) + \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u}$$

avec $\underline{u}(\underline{x}, t)$ le vecteur déplacement au point x à l'instant t .

2. Etablir l'équation de dispersion de l'équation de Lamé-Navier :

$$(\underline{U} \cdot \underline{k}) (\rho \omega^2 - (\lambda + 2\mu) |\underline{k}|^2) = 0$$

où $\underline{U}$ est l'amplitude du vecteur déplacement, $\underline{k}$ est le vecteur d'onde et ω est la pulsation.

3. En déduire que dans les solides, il existe deux polarisations : les ondes longitudinales et les ondes transverses et exprimer leurs vitesses de phase c_L et c_T en fonction des paramètres ρ , λ et μ .
4. Quel est le temps de propagation noté $t_A(x)$ d'une onde longitudinale entre la source et un capteur en fonction de x par le trajet direct (trajet A Figure 19.1) ?
5. On considère deux solides en contact. Une source placée dans le solide 1 émet des ondes longitudinales et transverses avec un angle θ_i par rapport à la verticale (cf Figure 19.2). Rappeler les lois de Snell-Descartes et compléter la Figure 19.2 dans les cas où $c_{L1} > c_{L2}$ et $c_{L1} < c_{L2}$ en prenant soin de faire apparaître les polarisations.

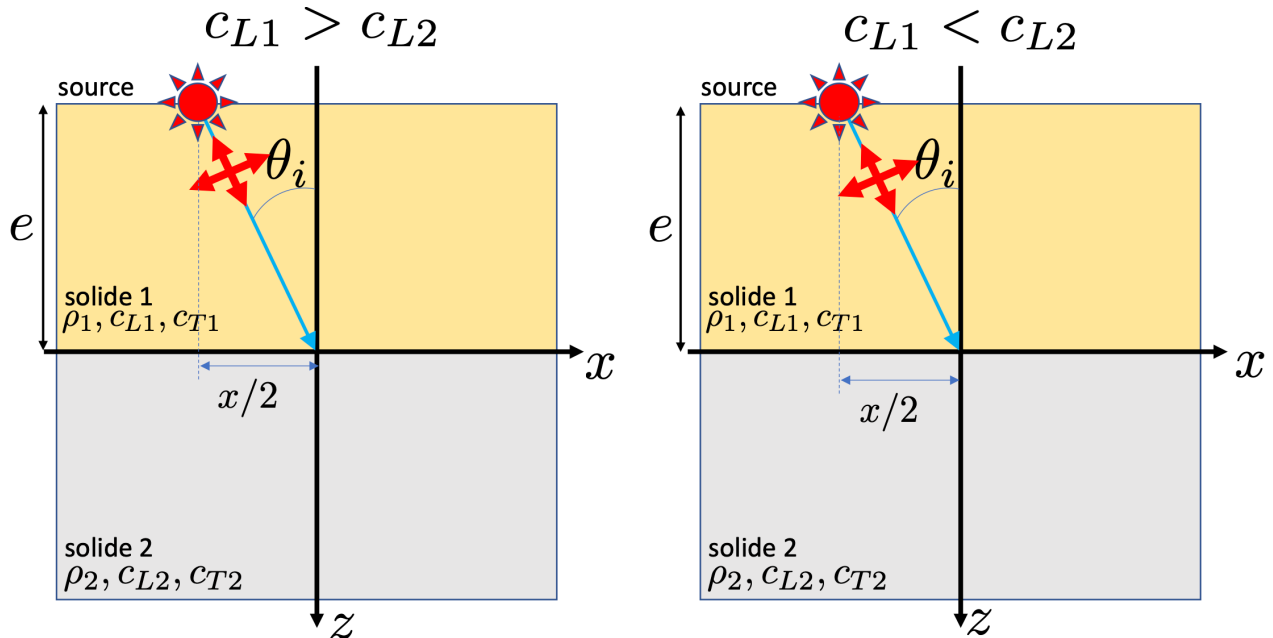


Figure 19.2: Réflexion et transmission entre deux solides

6. Lorsqu'il existe, quel est le temps de propagation noté $t_B(x)$ d'une onde longitudinale entre la source et un capteur en fonction de x par le trajet B (une seule réflexion sur l'interface solide/solide) ?
7. Dans le cas où $c_{L1} < c_{L2}$, il existe un angle d'incidence, appelé angle critique, pour lequel la réflexion est totale. Calculer θ_{cr} en fonction de c_{L1} et c_{L2} .
8. On se place dans le cas de l'incidence critique. La composante suivant $\underline{e_x}$ du champ de déplacement transmis dans le solide 2 est alors :

$$u_2(x, z, t) = A e^{i(k_{L2}x - \omega t)} e^{-\alpha(z-e)} \quad (19.1)$$

avec $\alpha \in \mathcal{R}^+$, et e l'épaisseur du solide 1 (cf Figure 19.1). De quel type d'onde s'agit-il ? Quelle est sa vitesse de propagation ?

9. En se propageant l'onde décrite par l'Équation 19.1 rayonne dans le solide 1 comme l'illustre la Figure 19.1. Quelle est la valeur de θ l'angle de l'onde rayonnée dans le solide 1 ? Justifier.
10. Montrer que lorsqu'il existe, le temps de propagation noté $t_C(x)$ d'une onde longitudinale entre la source et un capteur par le trajet C s'écrit :

$$t_C(x) = \frac{x}{c_{L2}} + \frac{2e}{c_{L1}} \cos \theta_{cr}$$

11. Montrer que cette expression peut se mettre sous la forme :

$$t_C(x) = \frac{x}{c_{L2}} + 2e \sqrt{\frac{1}{c_{L1}^2} - \frac{1}{c_{L2}^2}}$$

12. La Figure 19.3 présente l'évolution du temps d'arrivée théorique en fonction de la distance du capteur pour les trois chemins de propagation : $t_A(x)$, $t_B(x)$ et $t_C(x)$. Ce type de tracé est appelé courbes **dromochroniques**. Identifier les paramètres V_1 , V_2 , V_3 et t_0 en fonction des données du problème.
13. Pourquoi seule les ondes longitudinales passant par les chemins A et C ont un intérêt dans cette méthode ?
14. Montrer que le point x_c de la Figure 19.3 appelé distance de croisement a pour expression :

$$x_C = 2e \sqrt{\frac{c_{L1} + c_{L2}}{c_{L2} - c_{L1}}}$$

15. On dispose de 7 capteurs pour mesurer les signaux sismiques. Un traitement adapté (non précisé ici) permet d'extraire de chaque signal le premier temps d'arrivée. La position des capteurs et le premier temps d'arrivée sont donnés dans le tableau 1. Tracer les courbes dromochroniques correspondantes.

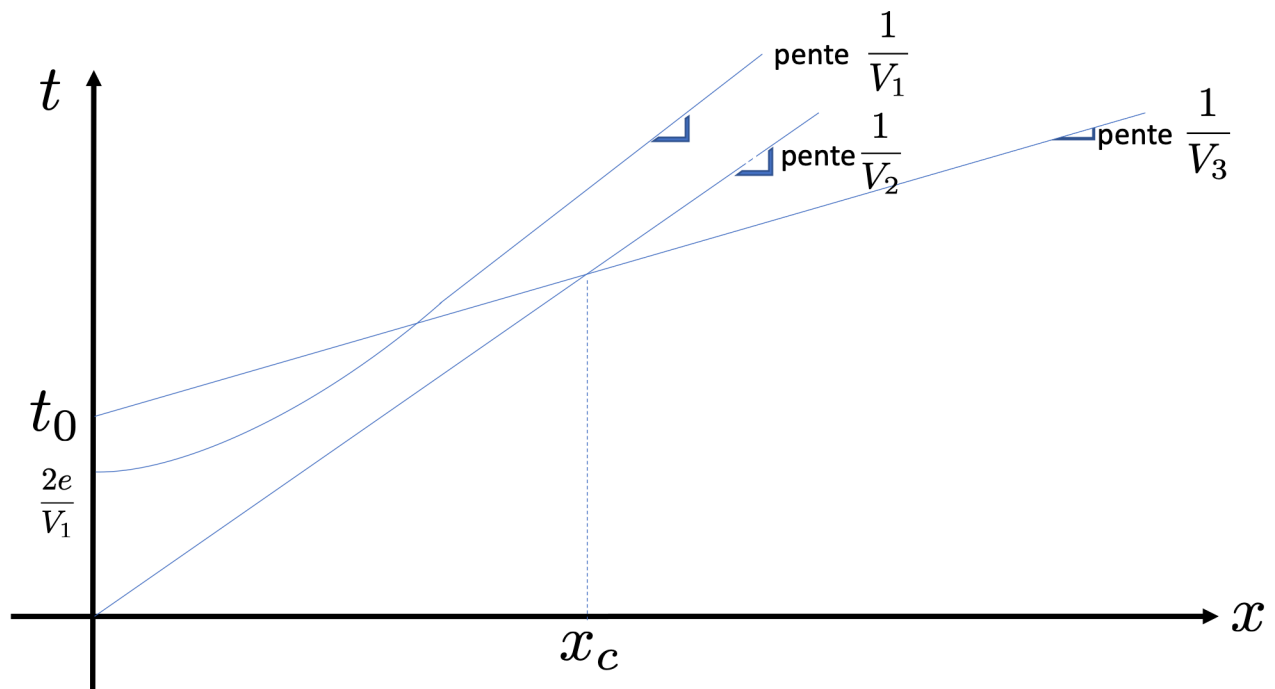


Figure 19.3: Courbes dromochroniques

Table 19.1: Positions et temps d'arrivée sur les capteurs sismiques

Capteur	position (m)	temps 1ère arrivée (s)
1	10	0.01
2	20	0.02
3	30	0.03
4	40	0.034
5	50	0.038
6	60	0.042
7	70	0.046

16. A partir des courbes dromochroniques estimer les vitesses de propagation des ondes longitudinales dans les deux couches c_{L1} et c_{L2} et l'épaisseur de la première couche e .
17. Pour ce type de géométrie quelle limitation est prévisible ?

💡 Solution

19.0.0.1 Équation de Lamé-Navier

On obtient l'équation de Lamé Navier en combinant l'équation de bilan de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \underline{\text{div}} \underline{\sigma}$$

la relation de Hooke :

$$\underline{\sigma} = \lambda \text{tr}(\underline{\epsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\epsilon}$$

et la définition du tenseur des déformations linéarisées :

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla}^T \underline{u})$$

Soit en notation indicielle :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j}$$

et donc :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

En regroupant les différents termes, on obtient :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Soit sous forme intrinsèque :

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) + \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u}$$

19.0.0.2 Équation de dispersion

On cherche la solution sous la forme d'une onde plane progressive harmonique :

$$\underline{u} = \underline{U} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)}$$

En injectant cette solution dans l'équation de Lamé-Navier, on trouve :

$$\rho \omega^2 \underline{U} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)} = (\lambda + \mu) (\underline{U} \cdot \underline{k}) \underline{k} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)} + \mu |\underline{k}|^2 \underline{U} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)}$$

En simplifiant d'abord, puis en multipliant par $\cdot \underline{k}$, on trouve :

$$(\underline{U} \cdot \underline{k}) (\rho \omega^2 - (\lambda + 2\mu) |\underline{k}|^2) = 0$$

19.0.0.3 Types d'ondes

Pour satisfaire la relation de dispersion, il y a deux possibilités :

1. $\rho\omega^2 = (\lambda + 2\mu)|\underline{k}|^2$,
2. $\underline{U} \cdot \underline{k} = 0$.

Les solutions de l'équation $\rho\omega^2 = (\lambda + 2\mu)|\underline{k}|^2$, sont :

$$\omega = \pm \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} |\underline{k}|$$

Les solutions associées à $\underline{U} \cdot \underline{k} = 0$, se trouvent en injectant cette relation dans la relation de dispersion :

$$\rho\omega^2 \underline{U} = \mu |\underline{k}|^2 \underline{U}$$

soit :

$$\omega = \pm \sqrt{\mu/\rho} |\underline{k}|$$

On voit qu'il y a plusieurs vitesses de phase ($c_\phi = \omega/k$) associées à la propagation d'ondes dans un solide élastique isotrope :

- $c_{\phi_1} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$
- $c_{\phi_2} = \sqrt{\mu/\rho}$

Les ondes ayant une vitesse de phase $c_{\phi_1} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ doivent vérifier l'égalité $\underline{U} = (\underline{U} \cdot \underline{k}) \underline{k} / |\underline{k}|^2$, donc la direction du déplacement $\underline{U}$ est colinéaire à la direction de l'onde $\underline{k}$: ce sont des **ondes longitudinales**, on notera $c_{\phi_1} = c_L$.

Les ondes ayant une vitesse de phase $c_{\phi_2} = \sqrt{\mu/\rho}$ doivent vérifier l'égalité $\underline{U} \cdot \underline{k} = 0$, donc la direction du déplacement $\underline{U}$ est perpendiculaire à la direction de l'onde $\underline{k}$:

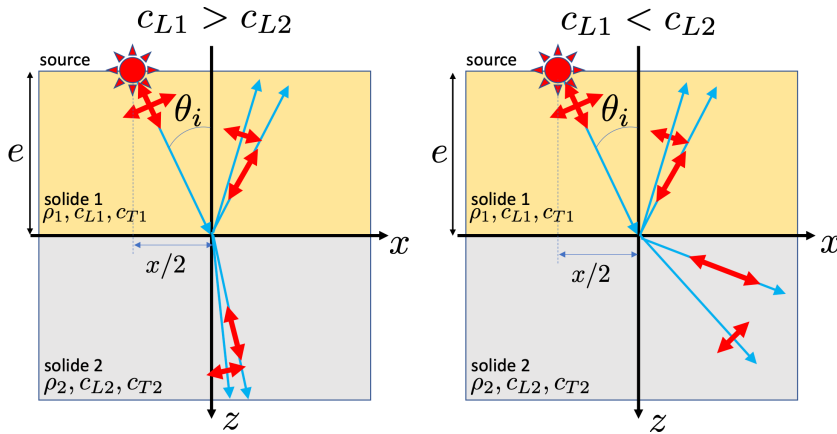
ce sont des **ondes transverses**, on notera $c_{\phi_2} = c_T$.

Par conséquent, dans les solides élastiques, les ondes peuvent être longitudinales ou transverses. Généralement, on a la superposition des deux types d'ondes. Il est important de remarquer que les ondes longitudinales se propagent toujours plus vite que les ondes transverses puisque $c_L > c_T$.

19.0.0.4 Temps de propagation

$$t_A = \frac{x}{c_{L1}}$$

19.0.0.5 Reflexion-transmission



19.0.0.6 Temps de propagation avec reflexion

$$t_B(x) = \frac{2\sqrt{e^2 + (x/2)^2}}{c_{L1}}$$

19.0.0.7 Angle critique

L'angle critique est l'angle incident correspondant à un angle transmis égal à $\pi/2$. D'après les lois de Snell-Descartes :

$$\frac{\sin \theta_{cr}}{c_{L1}} = \frac{\sin(\pi/2)}{c_{L2}}$$

Par conséquent :

$$\sin \theta_{cr} = \frac{c_{L1}}{c_{L2}}$$

19.0.0.8 Onde évanescente

Il s'agit d'une onde progressive dans la direction des x croissants. Elle est exponentiellement atténuée dans la direction z . La vitesse de propagation est :

$$V = \frac{\omega}{k_{L2}}$$

or $k_{L2} = \omega/c_{L2}$ donc :

$$V = c_{L2}$$

19.0.0.9 Angle rayonné

D'après les lois de Snell-Descartes, la valeur est $\theta = \theta_{cr}$

19.0.0.10 Temps de propagation C

On commence par un peu de géométrie : le trajet C est constitué de 3 segments:

1. le segment reliant la source à l'interface. Ce segment fait un angle θ_{cr} avec la verticale, sa longueur est donc : $L = \frac{e}{\cos \theta_{cr}}$
2. le segment symétrique reliant l'onde rasante à la surface. Il a la même longueur L que le premier segment.
3. le segment constitué par l'onde rasante, sa longueur dépend de x moins la projection des 2 premiers segments : $x - 2e \tan \theta_{cr}$ ou $x - 2\sqrt{L^2 - e^2}$

Par conséquent le temps de propagation est :

$$t_C(x) = \frac{e}{c_{L1} \cos \theta_{cr}} + \frac{e}{c_{L1} \cos \theta_{cr}} + \frac{x - 2e \tan \theta_{cr}}{c_{L2}}$$

$$t_C(x) = \frac{2e}{c_{L1} \cos \theta_{cr}} + \frac{x - 2e \tan \theta_{cr}}{c_{L2}}$$

$$t_C(x) = \frac{x}{c_{L2}} + \frac{2e}{c_{L1}} \left(\frac{1}{\cos \theta_{cr}} - \frac{c_{L1} \tan \theta_{cr}}{c_{L2}} \right)$$

$$t_C(x) = \frac{x}{c_{L2}} + \frac{2e}{c_{L1}} \left(\frac{1 - \sin^2 \theta_{cr}}{\cos \theta_{cr}} \right)$$

$$t_C(x) = \frac{x}{c_{L2}} + \frac{2e}{c_{L1}} \cos \theta_{cr}$$

On trouve la forme demandée en remarquant que :

$$\begin{aligned} \cos \theta_{cr} &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{cr}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{c_{L1}^2}{c_{L2}^2}} \\ &= \sqrt{\frac{c_{L2}^2 - c_{L1}^2}{c_{L2}^2}} \end{aligned}$$

19.0.0.11 Courbes dromochroniques

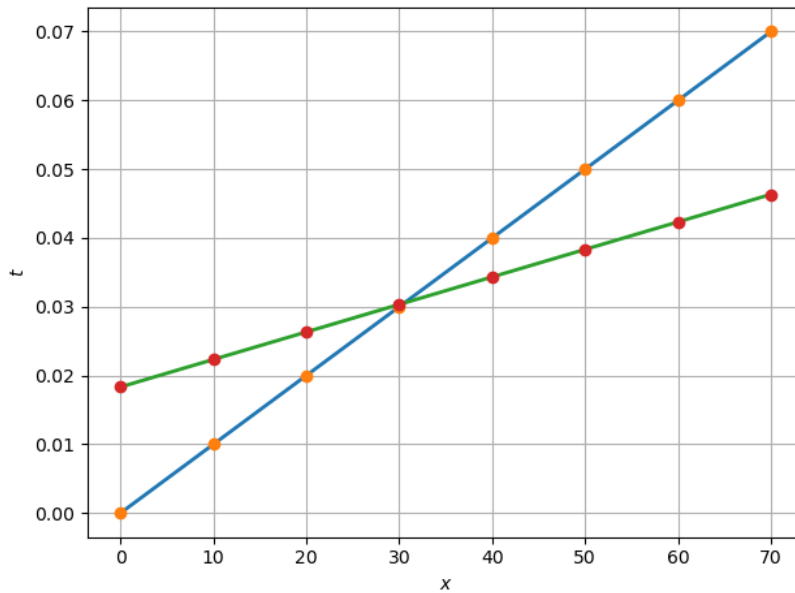
La figure présente 3 courbes

1. la parabole correspond à $t_B(x)$, et donc $V_1 = c_{L1}$,
2. la courbe 2 à une ordonnée à l'origine nulle, elle correspond à la propagation directe $t_A(x) : V_2 = c_{L1}$
3. la courbe 3 correspond donc à l'onde réfracté $t_C(x)$. D'après l'équation [eq:refractee] on a $V_3 = c_{L2}$ et $t_0 = 2e\sqrt{\frac{1}{c_{L1}^2} - \frac{1}{c_{L2}^2}}$

19.0.0.12 Vitesse des ondes

La méthode utilisée repose sur la détection des premières arrivées. Les ondes longitudinales passant par les chemins A et C sont les ondes les plus rapides et aucune autre onde ne pourra arriver avant et donc seules ces ondes seront détectées. Il est donc inutile de les prendre en compte.

19.0.0.13 Courbes expérimentales



19.0.0.14 Vitesses de propagation

La pente de la courbe bleue est :

$$\frac{1}{c_{L1}} \approx \frac{0.07}{70} \approx 1e-3$$

Par conséquent : $c_{L1} \approx 1000\text{m/s}$

La pente de la courbe verte est :

$$\frac{1}{c_{L2}} \approx \frac{0.046 - 0.019}{70} \approx \frac{0.028}{70} \approx 4e-3$$

Par conséquent : $c_{L2} \approx 2500\text{m/s}$

La distance de croisement est $x_C \approx 30\text{s}$. D'après la formule [eq:croisement] :

$$x_C = 2e \sqrt{\frac{c_{L1} + c_{L2}}{c_{L2} - c_{L1}}}$$

donc

$$e = \frac{x_C}{2} \sqrt{\frac{c_{L2} - c_{L1}}{c_{L2} + c_{L1}}}$$

et donc

$$e \approx \frac{30}{2} \sqrt{\frac{2500 - 1000}{2500 + 1000}} \approx 15 \sqrt{\frac{1500}{3500}} \approx 15 \sqrt{0.4} \approx 10\text{m}$$

19.0.0.15 Limitations géométriques

La méthode ne fonctionne que si $c_{L2} > c_{L1}$ sinon il n'y a pas d'onde réfractée mais seulement une onde réfléchie. L'onde la plus rapide étant l'onde directe, seule la vitesse de la première couche pourra être estimée à partir des premiers temps d'arrivée.

20 Vagues et tsunamis

Schématisation du problème

1. Rappeler la relation de dispersion des ondes de gravité.
2. Calculer la vitesse de phase des ondes de gravité.
3. On s'intéresse aux deux cas limites suivants :

- $kh \ll 1$
- $kh \gg 1$

Justifier et associer les expressions "propagation en eau profonde" et "propagation en eau peu profonde" à ces deux cas limites.

4. On rappelle que $\tanh(kh) \approx 1$ si $kh \gg 1$ et que $\tanh(kh) \approx kh$ si $kh \ll 1$. Que vaut la vitesse de phase dans ces deux régimes (les ondes sont-elles dispersives) ?
5. **A la plage** On s'intéresse à la propagation des vagues à la plage. En observant les vagues on s'aperçoit qu'elles arrivent toutes les 8s sur le rivage. Si on suppose que la hauteur de l'eau est égale à 1m, quelle est la longueur d'onde des vagues ?
6. **Tsunami** On s'intéresse maintenant au cas d'un tsunami généré par un tremblement de terre sous-marin en plein océan (on suppose que la profondeur de l'océan est de 4km). On suppose que la longueur d'onde associée au tsunami est de 100km. Dans quel régime est-on ("propagation en eau profonde" et "propagation en eau peu profonde") ? Quelle est la vitesse de propagation du tsunami (à exprimer en m/s et aussi en km/h) ?
7. **Le mascaret** Le mascaret est une onde de marée qui remonte le long de certain fleuve les jours de grandes marées. Quelle est la vitesse à laquelle remonte cette vague (on suppose qu'elle fait 2m de haut et que la longueur d'onde est environ 10m) dans un fleuve dont la profondeur est 2m ?

20.1 Ondes capillaires



Figure 20.1: Ondes gravito-capillaires

Lors de l'étude des vagues (ou ondes de gravité) faites en cours, nous avons négligé l'effet de capillarité qui peut exister à la surface d'un liquide (à cause de la tension de surface, la surface du liquide peut ne pas être plane). Dans ce problème, on se propose de voir l'influence de la tension de surface sur une interface eau/air, on parle alors d'ondes gravito-capillaires (c'est à dire des ondes dues à la gravité et à la capillarité du liquide). Dans l'étape de modélisation, la tension de surface peut être prise en compte via une modification de la pression à la surface du liquide. Les équations sont alors modifiées et on obtient une équation de dispersion plus complète que lorsque seules les ondes de gravité sont considérées :

$$\omega^2 = \left(g + \frac{Tk^2}{\rho_0} \right) k \tanh(kh)$$

où T est la tension de surface qui se mesure en N.m^{-1} .

1. Rappeler la relation générale qui existe entre la longueur d'onde λ et le nombre d'onde k .
2. Quelle est la relation de dispersion des ondes de gravité seules ?
3. Montrer que si la longueur d'onde est bien plus grande que la longueur capillaire ($l_c = 2\pi\sqrt{\frac{T}{g\rho_0}}$), alors les effets capillaires deviennent négligeables.
4. On donne $T = 7.10^{-2}\text{N.m}^{-1}$, estimer la longueur capillaire l_c au-dessus de laquelle les effets capillaires sont négligeables.

5. On suppose que la hauteur d'eau sans perturbation h est de l'ordre du mètre. Si on souhaite observer des effets capillaires importants, dans quel régime faut-il se placer : $kh \ll 1$ ou $kh \gg 1$?
6. On suppose qu'on est dans ce régime jusqu'à la fin du problème. Montrer que la relation de dispersion se simplifie :

$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho}$$

7. Calculer la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires.
8. Montrer que la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires a un minimum en $k = \frac{2\pi}{l_c}$.
9. Estimer la valeur numérique de la plus petite vitesse de phase possible pour les ondes gravito-capillaires (on donne $\sqrt[4]{28} = 2.3$).

20.2 Etude des vagues en eau peu profonde et profondeur variable

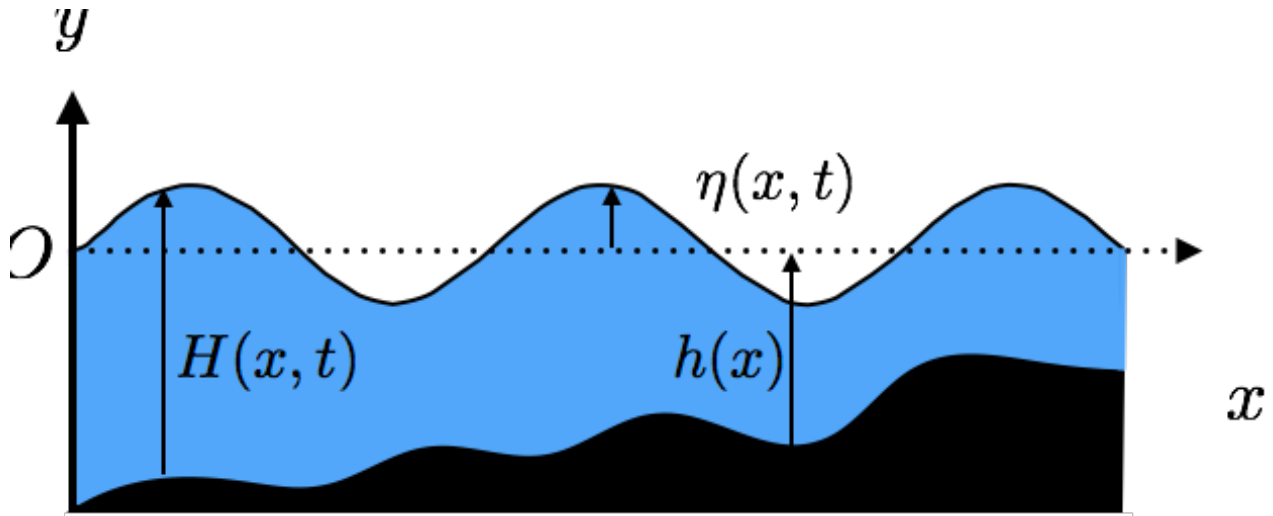


Figure 20.2: Propagation de vagues avec une profondeur variable

On cherche à modéliser la propagation de vagues dans un cas où la profondeur est variable. En prenant comme référence $y = 0$ pour une configuration sans vague, on note (voir Figure 20.2):

- $h(x)$ la profondeur de l'eau dans une configuration sans vague,
- $H(x, t)$ la hauteur totale de l'eau avec vagues (état de base + perturbation) au point x et à l'instant t ,
- $\eta(x, t)$ la hauteur des vagues (on remarque que $\eta(x, t) = H(x, t) - h(x)$).

Une des hypothèses fondamentales utilisées pour la modélisation de ce problème est de ne considérer que le cas pour lequel la profondeur est très faible devant la longueur d'onde des vagues $h(x) \ll \lambda$. On note le champ de vitesse : $\underline{V}(x, y, t) = u(x, y, t)\underline{e}_x + v(x, y, t)\underline{e}_y$. D'après l'hypothèse

précédente, on supposera que u (composante horizontale de la vitesse du fluide) est de la forme :

$$u(x, y, t) = u(x, t).$$

On suppose que la masse volumique en tout point (x, y) de l'eau et à tout instant t est constante $\rho(x, y, t) = \rho_0$ et on néglige tout les phénomènes de viscosité.

Enfin, on donne le champ de pression dans le fluide :

$$p(x, y, t) = \rho_0 g (\eta(x, t) - y) + P_0$$

avec P_0 la pression atmosphérique (supposée constante).

1. En projetant l'équation d'Euler (bilan de quantité de mouvement) suivant $\underline{e_x}$, montrer que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

2. En faisant un bilan de masse sur la tranche de fluide d'épaisseur dx , montrer que :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (Hu)}{\partial x} = 0$$

3. Les deux équations précédentes sont non-linéaires. On rappelle que $|u(x, t)| \ll 1$ et $|\eta(x, t)| \ll 1$. Linéariser les équations précédentes et montrer que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{cases}$$

4. Montrer qu'on peut écrire une équation de propagation pour la fonction $\eta(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

5. Calculer la relation de dispersion de cette équation
6. Calculer la vitesse de phase associée. Montrer que si la profondeur est constante, alors $c_\phi = \sqrt{gh}$. Est ce cohérent avec les résultats du cours ?

20.3 Aménagement sous-marin de l'entrée d'un port

On reprend les notations et les résultats de l'exercice précédent. Pour éviter l'ensablement d'un port, une marche a été aménagée à son entrée. Ainsi, le sable qui vient du large est bloqué par la marche (on suppose que le sable est entraîné au fond de l'eau). On cherche à caractériser les conséquences de cet aménagement sur la hauteur des vagues dans le port. On modélise la géométrie du problème de la façon suivante :

- vers le large, on considère un fond plat de hauteur h_1 ,
- vers le port, on a un fond plat de hauteur h_2 (avec $h_2 < h_1$).

On note $\eta_1(x, t)$ la hauteur des vagues dans la partie de hauteur h_1 et $\eta_2(x, t)$ la hauteur des vagues dans la partie de hauteur h_2 . On suppose que le changement de hauteur d'eau entraîne l'apparition d'une onde transmise (T est le coefficient de transmission en amplitude) et d'une onde réfléchiée (R est le coefficient de réflexion en amplitude).

Les conditions de continuité en $x = 0$ pour ce problème sont :

- continuité de la hauteur des vagues ($\eta_1(x = 0, t) = \eta_2(x = 0, t)$)
- continuité du débit ($u_1(x = 0, t)h_1 = u_2(x = 0, t)h_2$)

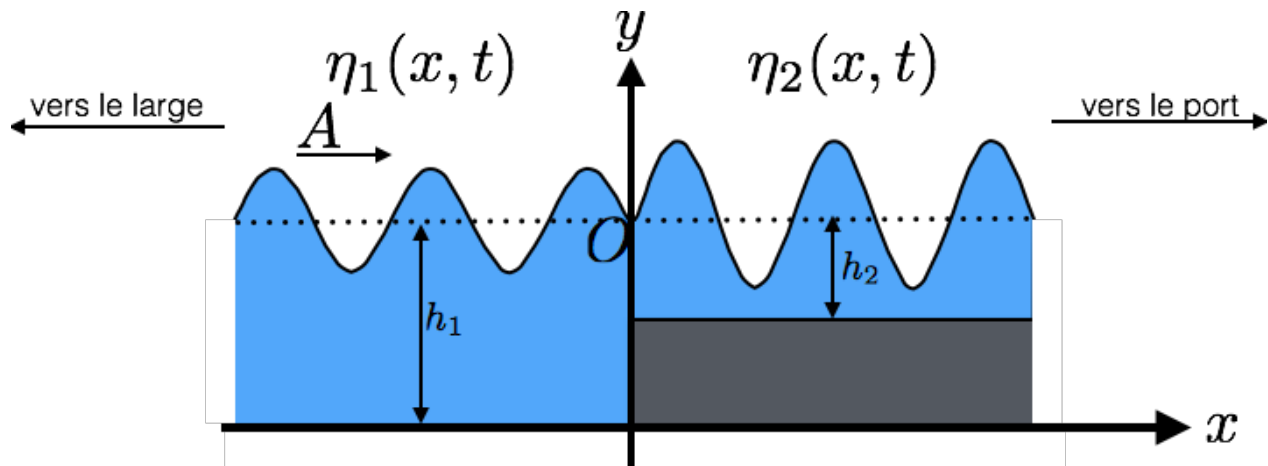


Figure 20.3: Propagation de vagues en eau peu profonde

1. Donner les équations des ondes que doivent satisfaire $\eta_1(x, t)$ et $\eta_2(x, t)$ et les vitesses de phases c_1 et c_2 dans ces deux cas.
2. En utilisant la continuité de la hauteur des vagues en $x = 0$, trouver une première relation entre les coefficients de réflexion et
3. Exprimer $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$ en fonction des données du problème.
4. En utilisant la continuité du débit en $x = 0$, trouver une deuxième relation entre R et T .
5. Dédire des questions précédentes les expressions de R et T en fonction des vitesses c_1 et c_2 .
6. Exprimer T en fonction de h_1 et h_2 .
7. Quelle va être la conséquence de l'aménagement du fond sous-marin sur la hauteur des vagues dans le port. Commenter.

💡 Solution

Vagues et tsunamis

20.3.0.1 Relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

20.3.0.2 Vitesse de phase

La vitesse de phase des ondes de gravité est

$$c_\phi = \frac{\omega}{k}$$

D'après la question précédente, on trouve :

$$c_\phi = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)}$$

20.3.0.3 Régimes

On rappelle que k est le nombre d'onde. Il est relié à la longueur d'onde par la relation $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Cette relation permet d'interpréter le coefficient kh :

- $kh \ll 1$ est équivalent à $2\pi h \ll \lambda$, la longueur d'onde est donc bien plus grande que la hauteur d'eau : on est dans le cas d'une propagation en eau peu profonde (comparée à la longueur d'onde);
 - $kh \gg 1$ est équivalent à $2\pi h \gg \lambda$, la longueur d'onde est donc bien plus petite que la hauteur d'eau : on est dans le cas d'une propagation en eau profonde (comparée à la longueur d'onde).
-

20.3.0.4 Vitesses de phase dans les deux régimes

- $kh \ll 1$ (propagation en eau peu profonde) :

$$c_\phi \approx \sqrt{gh}$$

La vitesse de phase est constante : ondes non dispersives.

- $kh \gg 1$ (propagation en eau profonde) :

$$c_\phi \approx \sqrt{\frac{g}{k}}$$

La vitesse de phase dépend de la fréquence (via le nombre d'onde) : ondes dispersives.

20.3.0.5 Plage

On fait l'hypothèse que la propagation se fait en eau peu profonde (car on est au bord de l'eau). La longueur d'onde est reliée à la vitesse de phase par la relation :

$$\lambda = \frac{c_\phi}{f}$$

La fréquence est $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{8}$ La vitesse des vagues est $c_\phi \approx \sqrt{gh} \approx \sqrt{10} \approx 3$ On en déduit la longueur d'onde des vagues :

$$\lambda \approx 3 \times 8 \approx 24 \text{ m}$$

Cette valeur est cohérente avec l'hypothèse de propagation en eau peu profonde ($24 \gg 2\pi$).

20.3.0.6 Tsunami

Compte tenu des valeurs de la longueur d'onde et de la hauteur de l'océan ($kh \approx 0.25$), on est dans le cas d'une propagation en eau peu profonde. La vitesse de propagation du tsunami est donc :

$$\begin{aligned} c_\phi &\approx \sqrt{gh} \\ &\approx \sqrt{10 \times 4000} \\ &\approx \sqrt{4 \cdot 10^4} \\ &\approx 2 \cdot 10^2 \text{ m/s} \\ &\approx 2 \cdot 10^2 \cdot 3600 / 1000 \text{ km/h} \\ &\approx 720 \text{ km/h} \end{aligned}$$

20.3.0.7 Mascaret

On calcule d'abord:

$$kh = \frac{2\pi h}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 2 \text{ m}}{10 \text{ m}} \approx 1.3$$

On se situe en régime intermédiaire, il faut donc appliquer la relation complète:

$$c_\phi = \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} \cdot \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \approx 3.6 \text{ m/s}$$

Si on fait l'hypothèse de faible profondeur on trouve $c_\phi \approx 4.5 \text{ m/s}$, soit 23% d'erreur.

Ondes capillaires

20.3.0.1 Nombre d'onde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

20.3.0.2 Gravité seule

Il suffit de négliger la tension de surface $T = 0$:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

20.3.0.3 Longueur capillaire

Dans la relation de dispersion, on voit qu'il y a la somme de deux termes : $\left(g + \frac{Tk^2}{\rho_0}\right)$ le premier est dû à la gravité, le second à la tension de surface. Les effets de tension de surface sont négligeables si :

$$g \gg \frac{Tk^2}{\rho_0}$$

ou encore :

$$k^2 \ll \frac{g\rho_0}{T}$$

on exprime cette relation à partir de la longueur d'onde :

$$\lambda \gg 2\pi \sqrt{\frac{T}{g\rho_0}}$$

20.3.0.4 AN

$$l_c \approx 1.7 \text{ cm}$$

20.3.0.5 Régime capillaire

Si $\lambda \gg l_c$ les effets sont négligeables. Donc on veut $\lambda \sim l_c \approx 1.6 \text{ cm}$ donc :

$$kh = \frac{2\pi h}{\lambda} \sim \frac{2\pi \cdot 1 \text{ m}}{1.7 \text{ cm}} \approx 370 \gg 1$$

C'est le régime dit d'eau profonde.

20.3.0.6 Dispersion

Si $kh \gg 1$, alors $\tanh(kh) \approx 1$, donc :

$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho}$$

20.3.0.7 Vitesse de phase

Par définition, la vitesse de phase est

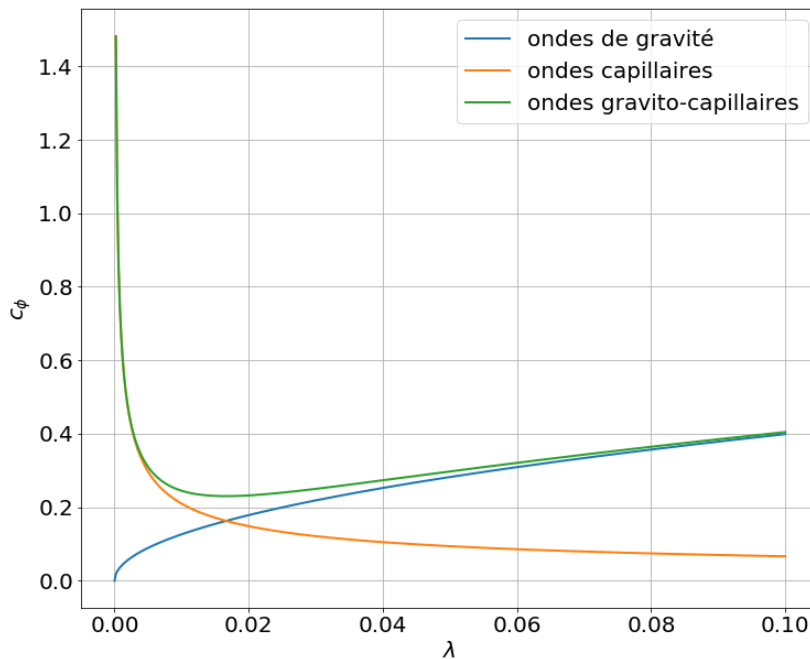
$$c_\phi = \frac{\omega}{k}$$

Donc pour les ondes gravito-capillaires on a donc :

$$c_\phi = \sqrt{\frac{1}{k} \left(g + \frac{Tk^2}{\rho_0} \right)}$$

20.3.0.8 Vitesse minimum

La figure ci-dessous montre la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires. On voit que la vitesse de phase a un minimum.



On a

$$c_\phi = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho_0}\right)}$$

Le minimum de c_ϕ correspond à $\frac{dc_\phi}{dk} = 0$:

$$\frac{dc_\phi}{dk} = \frac{1}{2} \left(\frac{-g}{k^2} + \frac{T}{\rho_0} \right) \left(\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho_0} \right)^{-1/2} = 0$$

par conséquent :

$$\left(\frac{-g}{k^2} + \frac{T}{\rho_0} \right) = 0$$

ou encore

$$k = \sqrt{\frac{g\rho_0}{T}} = \frac{2\pi}{l_c}$$

20.3.0.9 Valeur de la vitesse

On peut exprimer la vitesse de phase comme:

$$c_\phi = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho}} = \sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 + \frac{Tk^2}{\rho g}} = \sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 + \left(\frac{l_c}{\lambda}\right)^2}$$

Le minimum de c_ϕ se produit pour $k = 2\pi/l_c$ et vaut alors :

$$c_{\phi,\min} = \sqrt{\frac{4\pi g}{l_c}} \approx 23 \text{ cm/s}$$

Hauteur variable

20.3.0.1 Euler

L'équation d'Euler est :

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (\underline{V} \cdot \nabla) \underline{V} \right) = -\nabla p - \rho \underline{g}$$

L'équation d'Euler projetée sur $\underline{e}_x$ est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Comme $u = u(x, t)$, le troisième terme est nul, en injectant l'expression de $p(x, y)$ donné dans l'énoncé, on trouve le résultat demandé

20.3.0.2 Masse

On fait un bilan de masse (on prend une tranche d'épaisseur 1 dans la direction z).

La masse de la tranche est : $\rho_0 H(x, t) dx$. Son évolution en temps est donc : $\frac{\partial \rho_0 H(x, t) dx}{\partial t}$

L'évolution temporelle est égale au flux entrant (en x moins le flux entrant en $x + dx$:

$$\frac{\partial \rho_0 H(x, t) dx}{\partial t} = \rho_0 H(x, t) u(x, t) - \rho_0 H(x + dx, t) u(x + dx, t)$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \rho_0 H(x, t) dx}{\partial t} = -\rho_0 \frac{H u}{\partial x} dx$$

et donc finalement :

$$\frac{\partial H(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial H u}{\partial x} = 0$$

Alternative

On peut également considérer un intervalle $[x_1, x_2]$ de trille finie. La conservation de la masse donne:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \rho_0 H(x_1, t) u(x_1, t) - \rho_0 H(x_2, t) u(x_2, t) \\ \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho_0 H(x, t) dx &= - \int_{x_1}^{x_2} \rho_0 \frac{\partial (H(x, t) u(x, t))}{\partial x} dx \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (H u)}{\partial x} \right) dx &= 0 \end{aligned}$$

Puisque l'équation est vrai pour tout x_1 et tout x_2 , on a :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (H u)}{\partial x} = 0$$

20.3.0.3 Linéarisation

Les 2 équations trouvées précédemment sont

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial H u}{\partial x} \end{cases}$$

Le 2ème terme de la première équation est un terme quadratique en u , on peut l'éliminer. Dans la deuxième équation, on exprime H en fonction de η :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial (h(x) + \eta(x, t))}{\partial t} = -\frac{\partial (h(x) + \eta(x, t)) u}{\partial x} \end{cases}$$

Le terme $h(x)$ ne dépend pas du temps. Par ailleurs, le terme $\eta(x, t)u(x, t)$ est un terme quadratique, on peut l'éliminer :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial h(x)u}{\partial x} \end{cases}$$

20.3.0.4 Combinaison des équations

d'après la question précédente :

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 h(x)u}{\partial t \partial x}$$

On remarque que :

$$\frac{\partial^2 h(x)u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 h(x)u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

En injectant $\frac{\partial u}{\partial t}$ trouvé précédemment :

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(h(x)(-g) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = g \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

20.3.0.5 Solution à variables séparées

On cherche la solution sous la forme :

$$\eta(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

on trouve :

$$\omega^2 = -gik \frac{dh}{dx} + gk^2 h$$

20.3.0.6 Vitesse de phase

La vitesse de phase est :

$$c_\phi = \frac{\omega}{Re(k)}$$

On sait

que k est une racine du polynôme $ghk^2 - gik \frac{dh}{dx} - \omega^2 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = -gh' + 4gh\omega^2$.

Si $\Delta \geq 0$ alors

$$k_{1,2} = \frac{igh' \pm \sqrt{\Delta}}{2gh}$$

Si $\Delta < 0$ alors

$$k_{1,2} = \frac{igh' \pm i\sqrt{-\Delta}}{2gh}$$

Par conséquent, la vitesse de phase n'est définie que pour $\Delta \geq 0$ et vaut :

$$c_\phi = \frac{2gh\omega}{\sqrt{\Delta}}$$

Remarque dans le cas où la hauteur est constante $h'(x) = 0$ et $\Delta = 4gh\omega^2$, ce qui entraîne $c_\phi = \sqrt{gh}$ ce qui est cohérent avec les résultats précédents.

Aménagement

20.3.0.1 Équations d'onde

On a dans la partie 1:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} = gh_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ c_1 = \sqrt{gh_1} \end{cases}$$

et dans la partie 2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} = gh_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ c_2 = \sqrt{gh_2} \end{cases}$$

20.3.0.2 Ondes planes

$$\begin{cases} \eta_1(x, t) = Ae^{i(k_1 x - \omega t)} + ARe^{i(-k_1 x - \omega t)} \\ \eta_2(x, t) = ATe^{i(k_2 x - \omega t)} \end{cases}$$

20.3.0.3 Continuité de la hauteur

la hauteur des vagues est continue en $x = 0$:

$$\eta_1(x = 0, t) = \eta_2(x = 0, t)$$

par conséquent :

$$1 + R = T$$

20.3.0.4 Expression de la vitesse

On sait que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

donc

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = -g (Aik_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} - ARik_1 e^{i(-k_1 x - \omega t)}) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = -g (ATik_2 e^{i(k_2 x - \omega t)}) \end{cases}$$

En intégrant par rapport à t et en supposant les constantes d'intégration nulles, on trouve :

$$\begin{cases} u_1 = -g \left(-\frac{Ak_1}{\omega} e^{i(k_1 x - \omega t)} + \frac{ARk_1}{\omega} e^{i(-k_1 x - \omega t)} \right) \\ u_2 = \frac{ATk_2 g}{\omega} e^{i(k_2 x - \omega t)} \end{cases}$$

20.3.0.5 Continuité du débit

La condition de continuité de débit est : $u_1(x = 0, t)h_1 = u_2(x = 0, t)h_2$. En injectant la relation précédente et en utilisant la relation de dispersion ($\omega = c_n k_n$), on trouve :

$$\frac{gh_1}{c_1} - \frac{gRh_1}{c_1} = \frac{gTh_2}{c_2}$$

donc

$$\frac{h_1}{c_1} (1 - R) = \frac{h_2}{c_2} T$$

20.3.0.6 Coefficients

Pour obtenir R et T il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ \frac{h_1}{c_1} (1 - R) = \frac{h_2}{c_2} T \end{cases}$$

Tout d'abord, on remplace les hauteurs en les exprimant en fonction des vitesses de phase ($c_n = \sqrt{gh_n}$)

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ \frac{c_1^2}{gc_1} (1 - R) = \frac{c_2^2}{gc_2} T \end{cases}$$

Ce système se résoud facilement :

$$\begin{cases} R = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \\ T = \frac{2c_1}{c_1 + c_2} \end{cases}$$

20.3.0.7 Transmission

Comme

$$T = \frac{2c_1}{c_1 + c_2}$$

on a :

$$T = \frac{2}{1 + \sqrt{h_2/h_1}}$$

20.3.0.8 Conséquences

On a $h_2 < h_1$, donc $\sqrt{h_2/h_1} < 1$ et donc $T > 1$: la hauteur des vagues dans le port est plus grande que la hauteur des vagues au large. Cet aménagement est donc mauvais pour les bateaux qui vont être soumis à des vagues plus hautes.

A Algèbre utile aux vibrations et ondes

On note ci-dessous quelques résultats fondamentaux d'algèbre linéaire qui sont particulièrement utiles à l'analyse des systèmes vibrants linéaires.

Avertissement

Les résultats énoncés ici sont écrits dans un langage informel pour faciliter la compréhension. La lectrice ou le lecteur est invité-e à consulter un ouvrage d'algèbre linéaire, par exemple @cairoliAlgebreLineaire2004, disponible en [bibliothèque](#) pour plus de détails.

A.1 Systèmes singuliers

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée réelle. Les propositions suivantes sur $\mathbf{A}$ sont équivalentes (si l'une est vraie elles sont toutes vraies)

- $\mathbf{A}$ est inversible
- $\mathbf{A}x = 0$ admet l'unique solution $x = 0$
- les colonnes de $\mathbf{A}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ (et sont donc linéairement indépendantes), et les lignes de $\mathbf{A}$ forment aussi une base de $\mathbb{R}^n$.
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

On se servira souvent de l'équivalence suivante (issue de la négation des propositions ci-dessus):

$$\exists x \neq 0 \text{ tel que } \mathbf{A}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A}) = 0$$

Note

Cette équivalence permet de contraindre $\mathbf{A}$ à être singulière lorsque l'on cherche des solutions non-nulles de $\mathbf{A}x = 0$.

A.2 Indépendances de vecteurs

Soit $v_i \in V, i \in \{1, \dots, n\}$ une famille de vecteurs. Les vecteurs v_i sont linéairement indépendants si et seulement si l'équation:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$$

N'est vraie que pour $\lambda_i = 0 \forall i$.

Astuce

Ce principe s'applique aux vecteurs **et** aux fonctions. On sait par exemple que cos et sin sont des fonctions linéairement indépendantes. Si l'équation

$$A \sin(t) + B \cos(t) = 0 \quad \forall t,$$

est vraie, alors nécessairement:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

A.3 Définitions autour du produit scalaire

Soit $u, v \in V$ où V est un espace vectoriel. On définit le produit scalaire comme $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$.

Une matrice carrée **A** est définie positive si et seulement si

$$\langle v, \mathbf{A}v \rangle > 0, \quad \forall v \in V$$

Une matrice carrée **A** est non-négative si et seulement si

$$\langle v, \mathbf{A}v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V$$

Une matrice carrée **A** est symétrique si et seulement si

$$\langle u, \mathbf{A}v \rangle = \langle v, \mathbf{A}u \rangle, \quad \forall u, v \in V$$

A.4 Résultats utiles de diagonalisation

Une matrice carrée réelle **A** symétrique est diagonalisable, c'est-à-dire que

$$\exists \lambda, v \text{ tels que } \mathbf{A}v = \lambda v$$

et les propositions suivantes sont vraies:

- les valeurs propres λ_i de $\mathbf{A}$ sont réelles
- les vecteurs propres v_i de $\mathbf{A}$ forment une base et sont orthogonaux entre eux par rapport à $\mathbf{A}$, c'est-à-dire:

$$\langle v_j, \mathbf{A}v_i \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

A.4.1 Problème de valeurs propres généralisé

Les résultats ci-dessus s'appliquent également au problème de valeurs propres généralisé, qui est la recherche de λ, v tels que

$$\mathbf{A}v = \lambda \mathbf{B}v$$

où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices carrée réelles et symétriques. Les vecteurs propres v_i sont alors orthogonaux par rapport à $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ simultanément:

$$\langle v_j, \mathbf{A}v_i \rangle = \langle v_j, \mathbf{B}v_i \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

On note $\mathbf{V}$ la matrice formée par colonnes des vecteurs $v_i, i = 1, \dots, n$, on a pour conséquence de l'orthogonalité que

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \text{ est diagonale et } \mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V} \text{ est diagonale}$$

$\mathbf{V}$ est une matrice de changement de base. Rappelons que si v est un vecteur propre, alors αv est également un vecteur propre pour $\alpha \in \mathbb{R}$. On peut alors choisir des vecteurs propres spécifiques $\tilde{v}_i$ tels que:

$$\begin{cases} \langle \tilde{v}_i, \mathbf{A}\tilde{v}_i \rangle = \lambda_i \\ \langle \tilde{v}_i, \mathbf{B}\tilde{v}_i \rangle = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{V}} = \square \\ \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{I} \end{cases}$$

où $\square$ est une matrice diagonale contenant les valeurs propres (et $\mathbf{I}$ est l'identité).

Si de plus les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont non-négatives (ou définies positives), alors toutes les valeurs propres sont non-négatives car:

$$\lambda_i = \frac{\langle v_i, \mathbf{A}v_i \rangle}{\langle v_i, \mathbf{B}v_i \rangle} \geq 0 \quad \text{car} \quad \langle v, \mathbf{A}v \rangle \geq 0, \langle v, \mathbf{B}v \rangle \geq 0 \quad \forall v$$

i Note 4: Preuve informelle de l'orthogonalité

On note (λ_i, v_i) et (λ_j, v_j) deux couples valeurs-propre & vecteur-propre, $\lambda_i \neq \lambda_j$ (ce qui implique $i \neq j$). On a donc les deux équations suivantes:

$$\begin{cases} \mathbf{A}v_i = \lambda_i \mathbf{B}v_i \\ \mathbf{A}v_j = \lambda_j \mathbf{B}v_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle v_j, \mathbf{A}v_i \rangle = \langle v_j, \lambda_i \mathbf{B}v_i \rangle = \lambda_i \langle v_j, \mathbf{B}v_i \rangle \\ \langle v_i, \mathbf{A}v_j \rangle = \langle v_i, \lambda_j \mathbf{B}v_j \rangle = \lambda_j \langle v_i, \mathbf{B}v_j \rangle \end{cases}$$

En prenant la différence de ces deux équations, on obtient l'identité suivante:

$$\langle v_j, \mathbf{A}v_i \rangle - \langle v_i, \mathbf{A}v_j \rangle = \lambda_i \langle v_j, \mathbf{B}v_i \rangle - \lambda_j \langle v_i, \mathbf{B}v_j \rangle$$

Puisque $\mathbf{A}$ est symétrique, le terme à gauche de l'équation est nul et on peut factoriser le terme à droite de l'équation, ce qui donne:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle v_j, \mathbf{B}v_i \rangle = 0$$

Par hypothèse $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, on a donc v_i et v_j orthogonaux par rapport à $\mathbf{B}$, soit $\langle v_j, \mathbf{B}v_i \rangle = 0$. On peut reprendre l'une des deux équations ci-dessus pour montrer que les deux vecteurs propres sont aussi orthogonaux par rapport à $\mathbf{A}$.

A.5 Généralisation aux fonctions

Les résultats ci-dessus sont valides pour des espaces vectoriels à dimension finie ($\dim V = n$), mais sont généralisables pour des espaces vectoriels à dimension infinie. Le cas qui nous intéresse est celui des fonctions réelles intégrables $V_\Omega = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \int_\Omega |f|^2 dx < \infty\}$. En définissant le produit scalaire de deux fonctions:

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)g(x) dx,$$

on peut directement appliquer les résultats de diagonalisation ci-dessus à des applications linéaires $\mathbf{A} : V_\Omega \rightarrow V_\Omega$ et $\mathbf{B} : V_\Omega \rightarrow V_\Omega$.

i Exemple

Par exemple, soit $\rho(x)$ une fonction strictement positive de $x \in \Omega$. On peut définir l'application linéaire $\mathbf{A} : f \mapsto \rho f$ (on multiplie f par ρ en tout point de Ω). On peut aussi définir l'application linéaire $\mathbf{B} : f \mapsto -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (l'opposée de la dérivée seconde). Une fois les applications définies, on pourra diagonaliser le système $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ en cherchant les valeurs propres λ et les vecteurs propres $v \in V_\Omega$ (qui sont des fonctions membres d'un espace vectoriel) tels que:

$$\mathbf{A}v = \lambda \mathbf{B}v$$

On verra l'application concrète de cette généralisation dans le cadre de la vibration de systèmes continus.

B Oscillateur à un degré de liberté

Cette page résume les fondamentaux de l'oscillateur linéaire, aussi connu sous le nom de "système masse-ressort", dont l'équation est:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t).$$

On mettra cette équation sous forme canonique:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{1}{m}f(t), \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \text{et } \xi = \frac{c}{2m\omega_0}.$$

On nomme ω_0 la pulsation propre (ou naturelle) et ξ le coefficient d'amortissement (normalisé). On ajoute à l'équation ci-dessus les conditions initiales suivantes:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

qui prescrivent la position et la vitesse initiale.

On pourra également adimensionnaliser l'équation de l'oscillation en introduisant une distance caractéristique x^* ($x = \bar{x} \cdot x^*$) et en utilisant ω_0 (homogène à Temps⁻¹) pour adimensionnaliser le temps ($t = \bar{t}/\omega_0$):

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x &= \frac{1}{m}f(t) \Leftrightarrow \ddot{\bar{x}} \cdot x^* \omega_0^2 + 2\xi\omega_0^2\dot{\bar{x}} \cdot x^* + \omega_0^2\bar{x} \cdot x^* = \frac{1}{m}f(\bar{t}/\omega_0) \\ &\Leftrightarrow x^*\omega_0^2(\ddot{\bar{x}} + 2\xi\dot{\bar{x}} + \bar{x}) = \frac{1}{m}f(\bar{t}/\omega_0) \\ &\Leftrightarrow \ddot{\bar{x}} + 2\xi\dot{\bar{x}} + \bar{x} = \frac{1}{kx^*}f(\bar{t}/\omega_0) = \bar{f}(\bar{t}) \end{aligned}$$

$\bar{f}$ est la force externe adimensionnée (par kx^*) en fonction de $\bar{t}$.

Astuce

Le choix de x^* est à la charge du ou de la scientifique. Un choix commun est de prendre x^* égal à la position d'équilibre statique (par exemple sous l'effet de la gravité). Cela permet de déterminer l'importance du déplacement dû aux vibrations par rapport au déplacement dû aux charges mortes.

B.1 Vibrations libres

Lorsque $f(t) = 0$, on obtient l'équation homogène $\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$, dont les solutions sont:

- $\xi < 1$: $x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(A \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) + B \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \right) = C e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t - \phi)$
- $\xi = 1$: $x(t) = e^{-\omega_0 t} (A + Bt)$
- $\xi > 1$: $x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(A \cosh(\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} t) + B \sinh(\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} t) \right)$

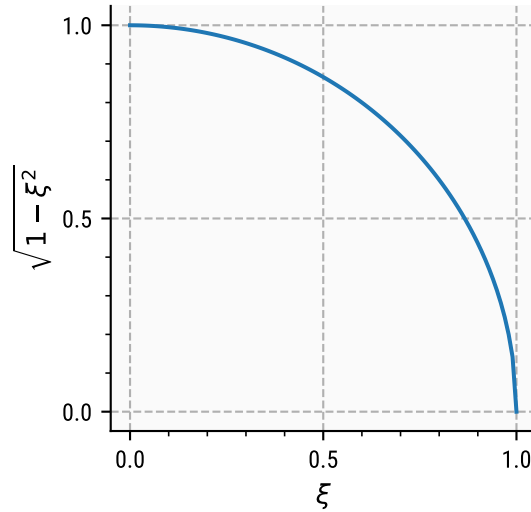
Les constantes A , B ou C , ϕ sont à déterminer à partir des conditions initiales. La Figure B.1 montre l'évolution de $x(t)$ dans les trois situations d'amortissement.

i Note

Il est important de noter que la période d'oscillation est affectée par l'amortissement ξ . La pulsation propre est :

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}.$$

En revanche, un développement asymptotique de ω_d révèle qu'au premier ordre, si $\xi \ll 1$, l'approximation $\omega_d \approx \omega_0$ est raisonnable.



Lorsque ξ s'approche de 1 le mouvement devient apériodique.

On remarque deux temps caractéristiques dans l'expression de $x(t)$ (dans le cas $0 < \xi < 1$):

- La (pseudo-)période d'oscillation $T_d = 2\pi/\omega_d$
- Le temps de décroissance de l'enveloppe exponentielle $\tau = (\xi\omega_0)^{-1}$

Si l'amortissement est faible ($\xi \ll 1$), ces deux échelles de temps sont bien séparées et $\tau \gg T_d$. À partir de la définition de τ , on peut réécrire l'équation de la dynamique:

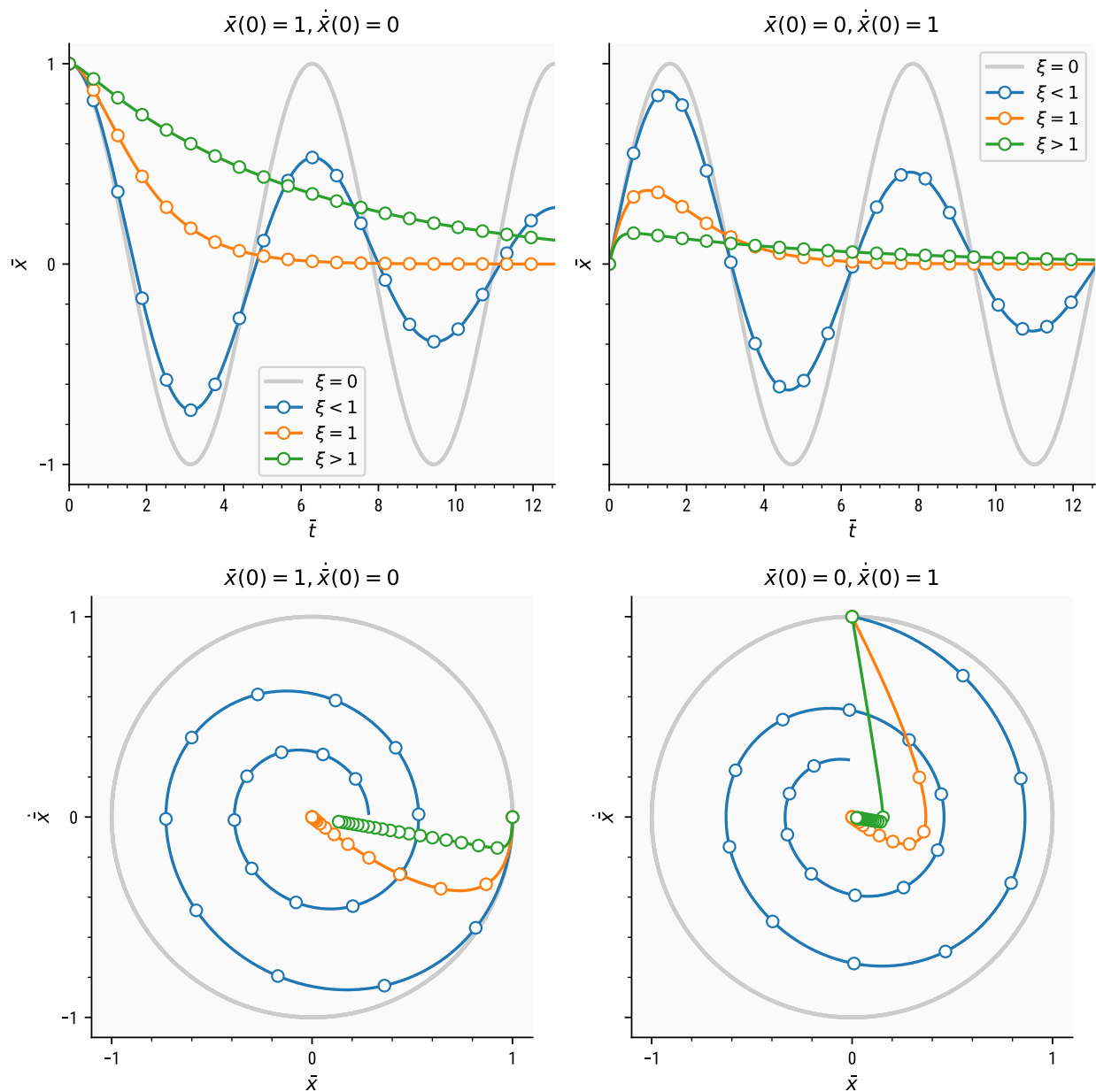


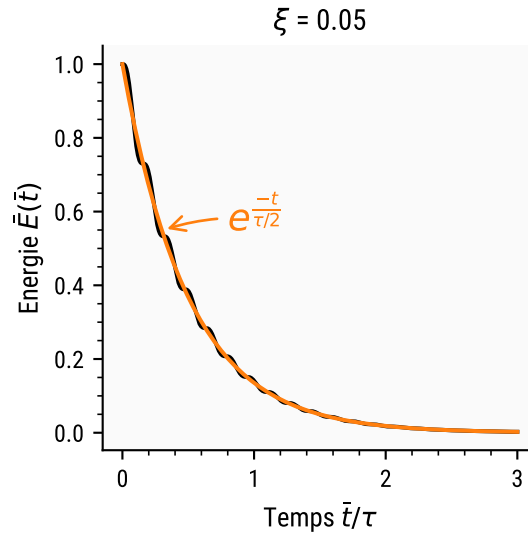
Figure B.1: Évolution en temps et dans l'espace des phases de l'oscillateur 1 degré de liberté. Colonne de gauche : déplacement initial, colonne de droite : vitesse initiale.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\ddot{x} + \frac{2m}{\tau}\dot{x} + kx = 0, \quad \text{on a donc } c = \frac{2m}{\tau}.$$

Le temps τ est lié à l'énergie mécanique échangée avec l'environnement, c'est-à-dire l'énergie dissipée ou "perdue".

$$\begin{aligned} U + T &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\omega_0^2 x^2 + \dot{x}^2) \\ &= \frac{1}{2}mC^2 e^{\frac{-2t}{\tau}} \left(\omega_0^2 \cos^2(\omega_d t - \phi) + \left(-\frac{1}{\tau} \cos(\omega_d t - \phi) - \omega_d \sin(\omega_d t - \phi) \right)^2 \right) \\ &\approx \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2 e^{\frac{-t}{\tau/2}} \end{aligned}$$

La dernière approximation suppose $\xi \ll 1$ (ce qui implique $\frac{1}{\tau} \ll \omega_d$, $\omega_d \approx \omega_0$). Le temps caractéristique de décroissance de l'énergie mécanique est donc $\tau/2$.



B.2 Vibrations forcées

On considère l'équation non-homogène :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}f(t).$$

La solution générale à cette équation s'écrit :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

où x_h est la solution générale de l'équation homogène, et x_p est une solution particulière de l'équation non-homogène. La solution particulière doit être déterminée au cas-par-cas à partir de $f(t)$: parfois il n'est pas possible d'obtenir une solution analytique.

B.2.1 Force externe harmonique

Le cas le plus simple est $f(t) = F(\Omega) \cos \Omega t$, ou alternativement $f(t) = F(\Omega) \sin \Omega t$. Ω est la pulsation du forçage, et la fonction $F(\Omega)$ donne l'amplitude de la force en fonction de Ω .

i Note

L'amplitude de la force externe peut varier en fonction de la fréquence de forçage selon la façon dont le forçage est appliqué sur la structure. Par exemple:

- Force directe F_0 sur la structure : $F(\Omega) = F_0$
- Mouvement de la base d'amplitude H (p.ex. la route dans le sillage de la peur, Chapitre 6): $F(\Omega) = kH \cdot \sqrt{1 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$
- Masse m tournante sur un cercle de rayon ℓ : $F(\Omega) = m\ell\Omega^2$.

B.2.1.1 Passage dans le plan complexe

Pour calculer la réponse forcée du système, on peut postuler une force de la solution particulière, soit $x(t) = X \cos(\Omega t + \phi)$, soit $x(t) = X \sin(\Omega t + \phi)$, soit $x(t) = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$. Pour simplifier, on passe dans le plan complexe avec une force externe de la forme:

$$f(t) = F(\Omega)e^{i\Omega t},$$

et on cherche une solution de la forme:

$$x(t) = Xe^{i\Omega t}, \quad X \in \mathbb{C}.$$

Le module $|X|$ et l'argument $\arg(X)$ donnent respectivement l'amplitude X et la phase ϕ des formes réelles de $x(t)$ proposées ci-dessus. On a besoin des dérivées de x :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= i\Omega X e^{i\Omega t}, \\ \ddot{x}(t) &= -\Omega^2 X e^{i\Omega t},\end{aligned}$$

puis on remplace dans l'équation non-homogène:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x &= \frac{F(\Omega)}{m}e^{i\Omega t} \\
\Leftrightarrow -\Omega^2 X e^{i\Omega t} + i2\xi\omega_0\Omega X e^{i\Omega t} + \omega_0^2 X e^{i\Omega t} &= \frac{F(\Omega)}{m}e^{i\Omega t} \\
\Leftrightarrow (\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\xi\omega_0\Omega) X e^{i\Omega t} &= \frac{F(\Omega)}{m}e^{i\Omega t} \\
\Leftrightarrow \left((\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\xi\omega_0\Omega) X - \frac{F(\Omega)}{m} \right) e^{i\Omega t} &= 0 \quad \forall t
\end{aligned}$$

La dernière équation ne peut être vraie pour tout t que si:

$$X = \frac{F(\Omega)/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\xi\omega_0\Omega} = \frac{F(\Omega)/m}{\omega_0^2 \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 + i2\xi \frac{\Omega}{\omega_0} \right)} = \frac{F(\Omega)/k}{1 - \beta^2 + i2\xi\beta} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

On souhaite maintenant trouver l'amplitude du mouvement forcé, et sa phase par rapport au forçage, on a:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{F(\Omega)/k}{1 - \beta^2 + i2\xi\beta} = \frac{F(\Omega)/k}{1 - \beta^2 + i2\xi\beta} \cdot \frac{1 - \beta^2 - i2\xi\beta}{1 - \beta^2 - i2\xi\beta} \\
&= \frac{F(\Omega)/k}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} (1 - \beta^2 - i2\xi\beta) \\
|X| &= \frac{F(\Omega)/k}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = \frac{F(\Omega)/k}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \\
\arg X &= \arctan \left(\frac{-2\xi\beta}{1 - \beta^2} \right)
\end{aligned}$$

La Figure B.2 montre l'amplitude et la phase du mouvement forcé pour $F(\Omega) = F_0$.

On remarque que le pic d'amplitude ne se produit pas à $\beta = 1$, mais $\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

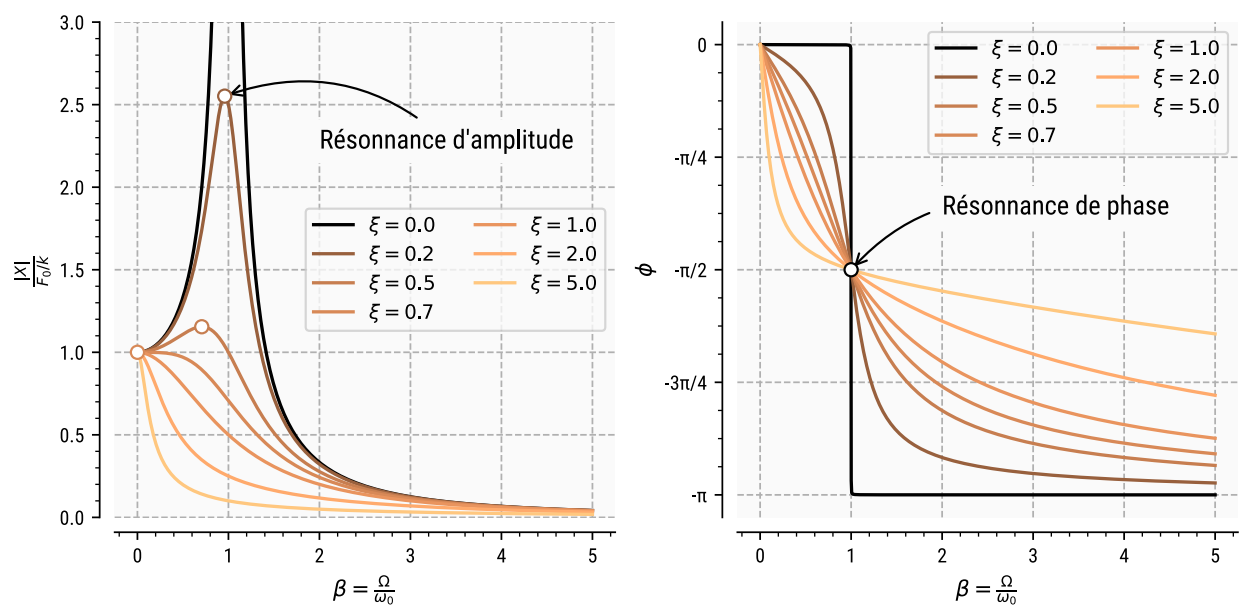


Figure B.2: Amplitude du mouvement forcé, et phase, pour $F(\Omega) = F_0$.

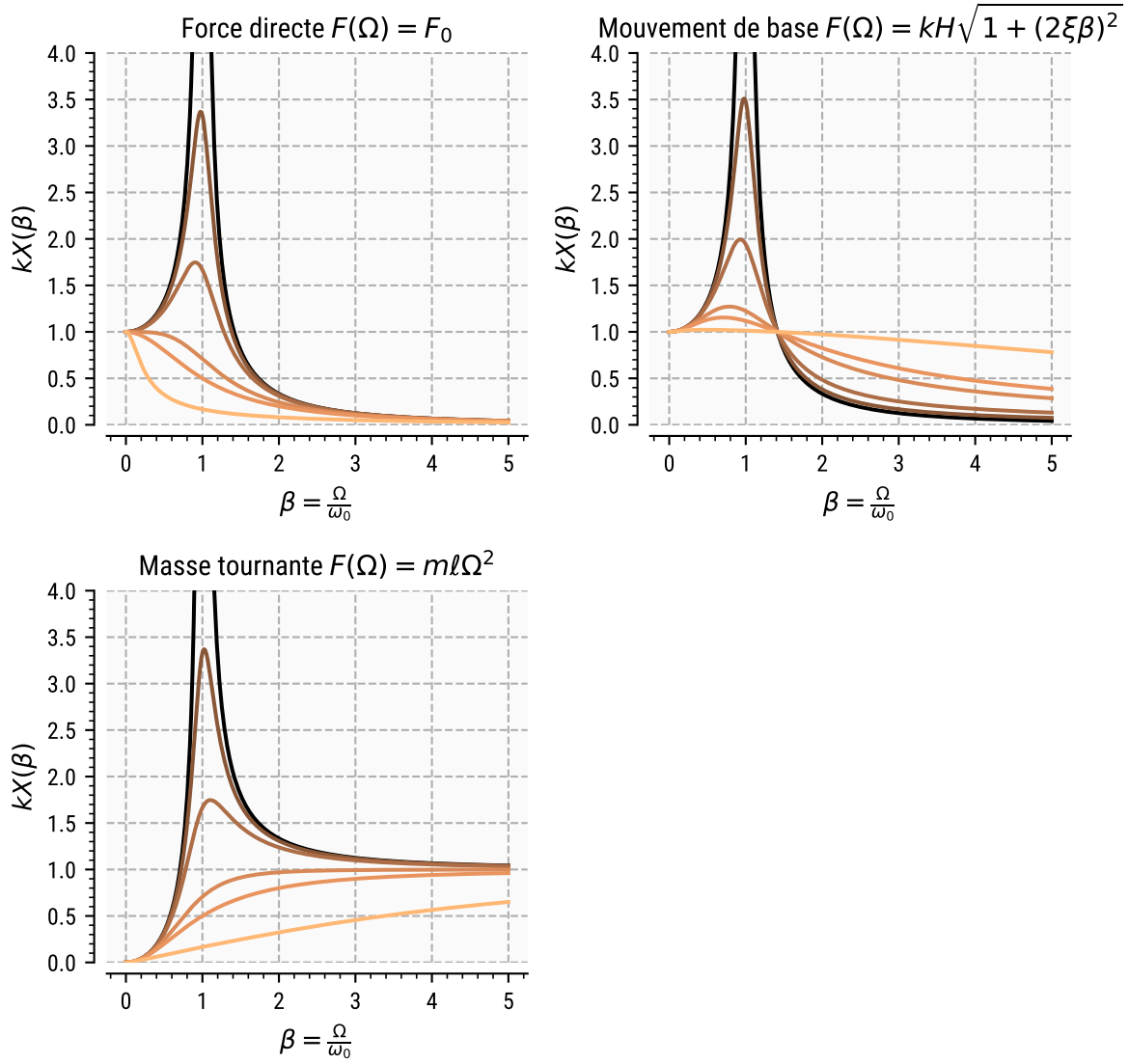


Figure B.3: Fonction de transfert pour les différentes situations de forçage.

Formulaire

Calculs de déterminants de matrice

Le déterminant d'une matrice 2x2 a pour expression

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

et celui d'une matrice 3x3 est donné par la relation

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = a(ei - fh) - d(bi - ch) + g(bf - ec).$$

Transformée de Laplace

$$\text{Définition : } f(t) \longleftrightarrow \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{st} dt$$

$$\text{Linéarité : } \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \longleftrightarrow \alpha_1 \tilde{f}_1(s) + \alpha_2 \tilde{f}_2(s)$$

$$\text{TL des dérivées : } \begin{cases} \dot{f}(t) \longleftrightarrow s\tilde{f}(s) - f(0) \\ \ddot{f}(t) \longleftrightarrow s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \end{cases}$$

$$\text{Propriétés de décalage : } \begin{cases} f(t - t_0)\Pi(t - t_0) \longleftrightarrow \tilde{f}(s)e^{-st_0} \\ f(t)e^{-t\omega_0} \longleftrightarrow \tilde{f}(s + \omega_0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\delta(t) &\longleftrightarrow 1 \\
t^n e^{\omega_0 t} \Pi(t) &\longleftrightarrow \frac{n!}{(s - \omega_0)^{n+1}} \\
\sin(\omega_0 t) \Pi(t) &\longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \\
\cos(\omega_0 t) \Pi(t) &\longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \\
e^{-at} \sin(\omega_0 t) \Pi(t) &\longleftrightarrow \frac{\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_0^2} \\
e^{-at} \cos(\omega_0 t) \Pi(t) &\longleftrightarrow \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}
\end{aligned}$$

Tables d'intégrales

Si m et n sont des entiers non nuls tels que $m \neq n$, on a

$$\begin{cases} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{2L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2L}x\right) dx = \frac{L}{\pi(m-n)} \sin(m-n)\frac{\pi}{2} - \frac{L}{\pi(m+n)} \sin(m+n)\frac{\pi}{2}, \\ \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{2L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2L}x\right) dx = \frac{L}{\pi(m-n)} \sin(m-n)\frac{\pi}{2} + \frac{L}{\pi(m+n)} \sin(m+n)\frac{\pi}{2}, \\ \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{2L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2L}x\right) dx = \frac{L}{2}. \end{cases}$$

Si m est un entier non nul, on a

$$\begin{cases} \int_0^L \sin^2\left(\frac{m\pi}{2L}x\right) dx = \frac{L}{2}, \\ \int_0^L \cos^2\left(\frac{m\pi}{2L}x\right) dx = \frac{L}{2}, \\ \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{2L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2L}x\right) dx = \frac{L}{2}. \end{cases}$$